Г. ВИЛЕЙТНЕР

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСК III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Г. Т. Т. И.

MATHEMATISCHE QUELLENBÜCHER

III

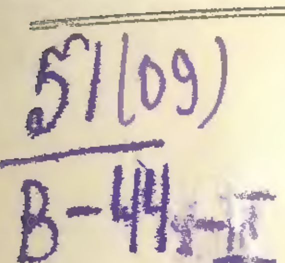
ANALYTISCHE
und
SYNTHETISCHE GEOMETRIE

von

DR. HEINRICH WIELEITNER



VERLAG OTTO SALLE. BERLIN. 1928



Г. ВИЛЕЙТНЕР

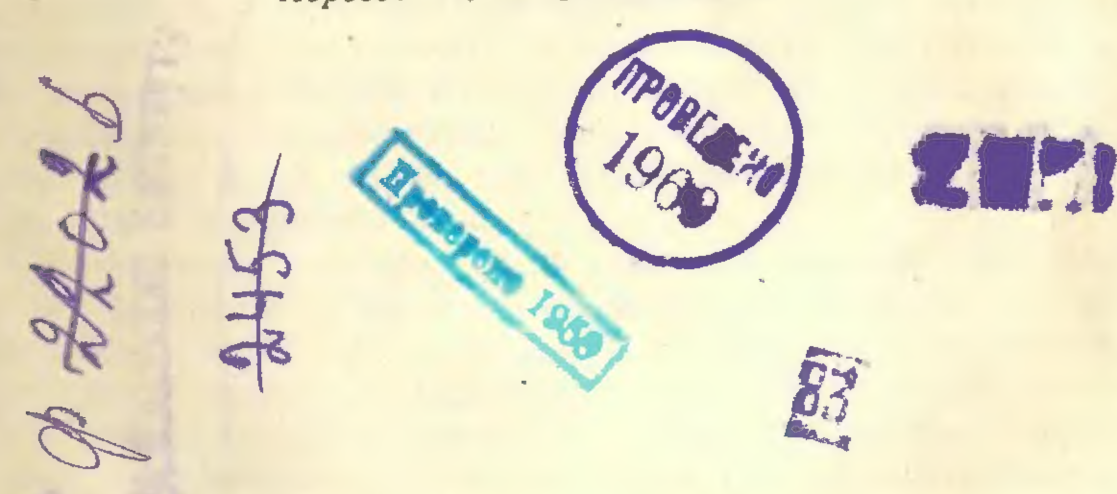
ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

СОСТАВЛЕННАЯ ПО ПЕРВОИСТОЧНИКАМ

ВЫПУСК ТРЕТИЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

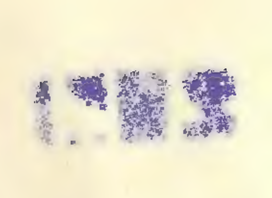
Перевод П. С. ЮШКЕВИЧА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

ТТ—10—5—4

Читатель, сообщите отзыв об этой книге (ваши замечания о ее недостатках и желательных изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Ильинка, проезд Владимирова, 4, Государственному технико-теоретическому издательству (в секцию организационно-массовой работы).





Редакционная работа по этой книге проведена *А. П. Юшкевичем*. Издание оформлено *Н. И. Москвицевой*. Корректуру держала *Н. А. Демина*. Наблюдал за выпуском *Н. М. Богданов*. Рукопись сдана в производство 13/III 1932 г. Листы подписаны к печати 1/XI 1932 г. Книга вышла в свет в ноябре 1932 г. в количестве 5000 экз. на бумаге формата 82 × 110 1/32. Печатных знаков в листе 43000. Листов в книге 4 3/4. Заказ № 876.
ГТТИ № 255. Уполномоченный Главлита В-39560.

1-я типография Огиза РСФСР „Образцовая“, Москва, Валовая, 28.

Предисловие

Когда к началу XVII в. буквенное исчисление оказалось разработанным настолько, что можно было мало-помалу начать пользоваться символикой формул, то исчисление это было приложено и к геометрии. Благодаря приложению его к элементарным задачам возникла алгебраическая геометрия, являющаяся еще и в настоящее время излюбленным предметом в школьном преподавании. В результате же применения алгебраического исчисления к созданному Архимедом и, в особенности, Аполлонием учению о конических сечениях возникла аналитическая геометрия.

Поэтому в предлагаемом III томике хрестоматии я исхожу из античного учения о конических сечениях и лишь затем перехожу к аналитическим формулировкам Ферма́ и Декарта. Но тот, кому первые параграфы покажутся слишком трудными или просто утомительными, тот может спокойно начать с № IV. Тяжеловесности изложения, естественно усилившейся от строго дословного перевода, нельзя было избежать, если желательно было дать читателю возможность заглянуть по-настоящему в метод работы древних геометров. Ознакомившись с ним, он сможет только радоваться, что в наше время все это преподносится в гораздо более легком и удобном виде.

Синтетическая геометрия тесно связана с аналитической, ибо обе они оперируют в значительной мере над одним и тем же материалом. Ничего нет удивительного, поэтому, что чисто геометрическое, свободное от рассмотрения конуса, исследование конических сечений возникло тоже в XVII в. благодаря работам Дезарга; но оно не укрепилось и совершенно заглохло, чтобы возродиться лишь к началу XIX в. Подымался вопрос, не откроются ли и корни проективной геометрии в древности. Зародыш ее некоторые исследователи готовы были видеть в утерянных „Поризмах“ Эвклида. Но если бы это и было справедливо, то форма изложения изменилась настолько, что можно спокойно говорить о совершенно новой дисциплине.

При составлении настоящего томика я руководился теми же общими принципами, которые легли в основу первого выпуска.

Но по сравнению с оригиналами я здесь позаботился о наборе всех букв курсивом, между тем как даже в книгах XVIII в. курсивом набраны большей частью лишь строчные буквы. Рисунки трудов древнегреческих авторов, выполненные в изданиях, сделанных по рукописям, очень неудовлетворительно, я изготовил согласно требованиям правильной косоугольной проекции.

Коллега Буллемер (Bullemer) и в настоящем случае проверил перевод отрывков из классических авторов.

Мюнхен,
февраль 1928 г.

Г. Вилейтнер.

I.

Определение общего кругового конуса

Из „Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis", Ed. I. L. Heiberg, Lipsiae MDCCCXCI, т. I (по-греч. и по-лат.). Немецкий перевод А. Чвалины (A. Czwalina) „Die Kegelschnitte des Apollonios", Мюнхен, 1926.

Стр. 6—7 (нем. пер. стр. 2). Если из какой-нибудь произвольной точки проведена прямая к окружности круга, не лежащего в одной плоскости с этой точкой, и продолжена по обе стороны и если, оставляя неподвижной эту точку, водить указанной прямой по окружности круга, пока она не вернется в то самое положение, из которого началось движение, то образуемую прямой поверхность, состоящую из двух соединенных между собой вершинами поверхностей, каждая из которых простирается в бесконечность, я называю конической поверхностью, неподвижную точку—вершиной (верхушкой), а прямую, соединяющую неподвижную точку с центром круга,—осью (конуса).

Пояснительные замечания. Согласно одному позднейшему свидетельству конические сечения открыты неким Менехмом (Menaichmos, около 360 г. до н. э.), современником Платона и учеником знаменитого Эвдокса. Из сохранившегося об этом сообщения неясно, открыл ли он их впервые или же нашел, что уже бывшие известными каким-то иным путем линии: эллипс, параболу, гиперболу можно получить при помощи сечений конусов вращения. Во всяком случае он прибегнул к коническим сечениям для решения занимавшей тогда мысль ученых проблемы удвоения куба (или, как мы бы сказали, для решения уравнения $x^3 = 2a^3$). Производя сечение всегда перпендикулярно к образующей конуса, стали называть три вышеупомянутые линии в указанном порядке сечениями остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов. Первое сочинение о „пространственных местах" (т. е. конических сечениях) было написано Аристеем (Aristaios) старшим. Несколько позже (около 300 г. до н. э.) Эвклид написал к нему в виде дополне-

ния труд о конических сечениях. Однако оба эти произведения не дошли до нас. Хотя Архимед расширил во многих пунктах учение о конических сечениях, но он не составил собственного труда о них. Наконец, выступил Аполлоний (170 г. до н. э.) с трудом в 8 книгах о конических сечениях. Из них сохранились первые 4 по-гречески, следующие 3 — по-арабски. Последняя книга утеряна. Сохранившиеся по-арабски книги были переведены в 1710 г. на латинский язык Галлеем (Halley, по имени которого названа известная комета).

В первых четырех книгах Аполлоний, повидимому, сильно придерживался Эвклида. Однако он совершенно освободился от традиционного метода пользоваться различными конусами для различных конических сечений. Как мы выше видели, он дает определение совершенно общего наклонного кругового конуса, над которым и производит свои сечения. Только в дальнейшем ходе его рассуждений оказывается, что полученные, таким образом, кривые можно обнаружить и в случае сечения конуса вращения и что, следовательно, они тождественны с линиями, которые были раньше названы „коническими сечениями". Ничего загадочного нет в том обстоятельстве, что Аполлоний все еще оперирует с кругом как „основанием". В настоящее время мы знаем, что мы имеем здесь перед собой общий конус второго порядка; по существу, это знает и Аполлоний, но он этого не может выразить при помощи своего геометрического метода.

Весьма интересно введенное, вероятно, тоже Аполлонием новшество — мыслить себе образующую прямую продолженной в обе стороны до бесконечности. Благодаря этому он оказывается в состоянии формулировать ряд теорем для гиперболы так, как он это делает для конических сечений с одной ветвью. Новые названия конических сечений также восходят к Аполлонию, и мы вскоре познакомимся с их значением (см. ниже № III).

II

Круговые сечения наклонного конуса

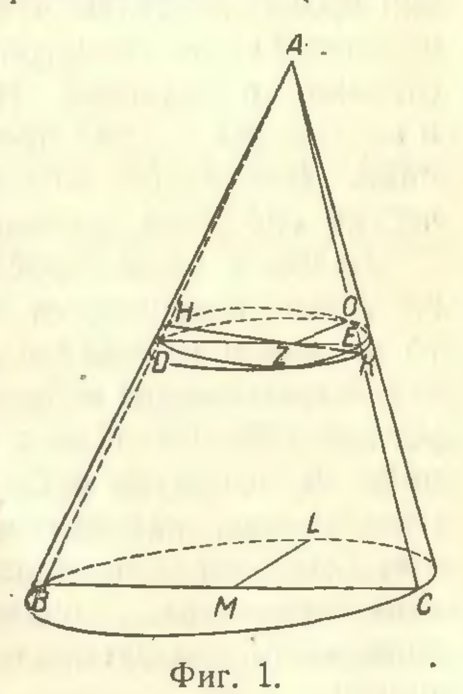
Из „Apollonii Pergaei quae graece exstant", ed. I. L. Heiberg, Lipsiae MDCCCXCI, т. I, кн. I, 5.

Стр. 16/17 (греч. или лат.; нем. стр. 6). Если произвести сечение наклонного конуса плоскостью, проходящей через ось и перпендикулярной к основанию, и произвести сечение его второй плоскостью, перпендикулярной к осевому треугольнику, и если эта последняя плоскость отсекает по направлению к вершине треугольник, подобный треугольнику через

(8) ось, но расположенный противоположным образом, то сечением (плоскости с конусом) будет круг, и такое сечение будет называться „противосечением".

Пусть дан наклонный конус, вершина которого точка A, а основание круг BC (фиг. 1); пусть производят сечение его плоскостью через ось перпендикулярно к кругу BC, и пусть это сечение даст треугольник ABC.

Пусть производят также сечение его второй плоскостью, перпендикулярной к треугольнику ABC и отсекающей по направлению к точке A треугольник AKH, подобный треугольнику ABC, но расположенный противоположно (с антипараллельной стороной), т. е. так, что угол AKH равен углу ABC. И пусть сечением (плоскости) с поверхностью (конуса) будет линия HOK. Я утверждаю, что линия HOK есть круг.



Фиг. 1.

Действительно, возьмем на линиях HOK, BC любые точки O, L и опустим из точек O, L перпендикуляры на (определяемую) треугольником ABC плоскость. Они пересекут общие линии пересечения плоскостей, и пусть так получатся перпендикуляры ZO, LM. Следовательно, ZO параллельно LM. Проведем теперь через (точку) Z (прямую) DZE параллельно BC. Но ZO также параллельно LM. Значит плоскость через ZO, DE параллельна основанию конуса. Поэтому она[1] — круг, диаметр которого есть DE. Следовательно (прямоугольник) на DZ, ZE равен (квадрату) на ZO. И так как ED параллельна BC, то угол ADE равен углу ABC. Но (угол) AKH предположен равным углу ABC. Следовательно, и (угол) AKH равен углу ADE. Но и расположенные у точки Z (вертикальные) углы равны. Поэтому треугольник DZH подобен треугольнику KZE. Следовательно, как EZ относится к ZK, так KZ — к ZD. Следовательно, прямоугольник на (20) EZD (т. е. на EZ и ZD) равен прямоугольнику на KZH. Но было показано, что (прямоугольник) на EZD равен (квадрату) на ZO. Следовательно, и (прямо-

[1] Из этого выражения ясно, что под „плоскостью" Аполлоний понимает только интересующую его ограниченную часть плоскости.

угольник) на KZ, ZH равен (квадрату) на ZO. Подобным же образом можно было бы доказать, что и все опущенные из линии HOK на HK перпендикуляры в квадрате равны (прямоугольнику) на отрезках HK.

Следовательно, сечение, диаметр которого есть HK, есть круг.

Пояснительные замечания. Если коснуться сперва формы изложения, то всякому читающему в первый раз подобный текст прежде всего бросается в глаза, что это сплошной текст без всяких формул или символов. При более внимательном чтении можно заметить, что встречающиеся здесь элементы алгебры изложены чисто геометрическим образом, как, например, отношения отрезков в подобных треугольниках или произведения внешних и внутренних членов пропорции, рассматриваемые как прямоугольники. Дело в том, что греки совершенно не обладали алгебраическим способом выражения.

Далее, в глаза бросается многословность текста. Одни и те же фразы повторяются вскоре друг за другом. Мы уже встретили то же самое у Эвклида (см. т. II, № 2). Я там указал на то, что эти доказательства первоначально излагались, без сомнения, только устным образом. При этом рисунок чертили либо прямо на земле, либо на покрытой песком доске. При таком способе изложения приходилось, разумеется, постоянно возвращаться к тому, что уже было доказано. Создавшаяся таким путем форма доказательства передавалась, очевидно, устным образом, а когда начали записывать доказательства, то их многословие при этом сохранилось.

Само доказательство очень просто. Мы в настоящее время изложили бы его в следующем виде: в круге DOE

$$OZ^2 = DZ \cdot ZE,$$

но из подобия треугольников мы имеем:

$$\frac{DZ}{HZ} = \frac{ZK}{ZE},$$

или

$$DZ \cdot ZE = HZ \cdot ZK.$$

Следовательно, мы имеем также:

$$OZ^2 = HZ \cdot ZK,$$

для любой точки O кривой HOK, и, значит, эта кривая есть круг.

Теорема эта имеет очень важное значение. Формулируя ее в несколько более общем виде, чем это здесь сделал Аполлоний (и чем это он мог сделать в данном месте), мы можем сказать, что для всякого наклонного конуса второго порядка (см. выше № 1) можно выделить два основных положения плоскостей, именно: параллельное плоскости *BLC* и параллельное плоскости *HOK*. В этих положениях пересечение каждой плоскости с конусом дает круг. Можно к этому прибавить, что вокруг четырехугольника *BCKH* можно описать окружность и что через обе окружности *BLC* и *HOK* можно провести шар, пересекающий конус именно по обеим этим окружностям.

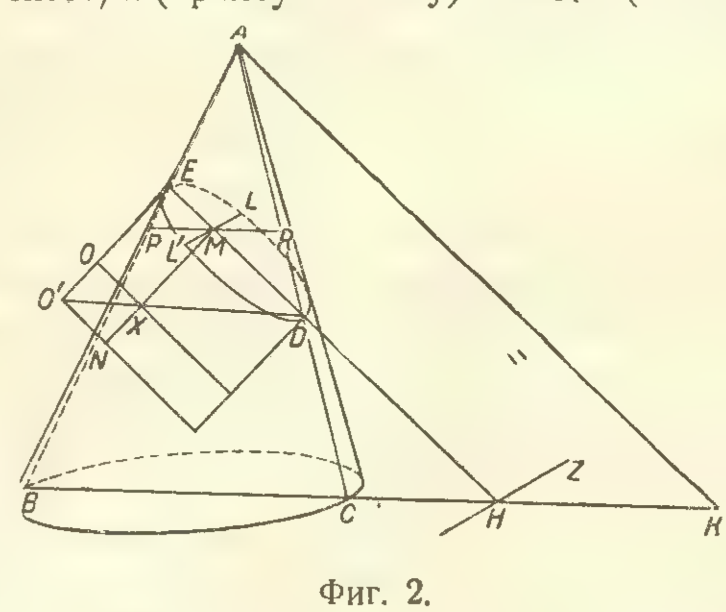
III

Определение эллипса как сечения наклонного кругового конуса

Из „Apollonii Pergaei quae graece exstant“, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae MDCCCXCI, т. I, книга 1, 13.

Стр. 48/49 (греч. или лат., нем. стр. 15). Если произвести сечение конуса плоскостью через ось, а также еще другой плоскостью, которая пересекает каждую из (обеих) сторон проходящего через ось треугольника, но которая не параллельна ни основанию конуса, ни (так называемому) противосечению (см. выше, № II), и если плоскость, в которой расположено основание конуса, и секущая плоскость пересекаются по прямой, перпендикулярной либо к основанию проходящего через ось треугольника, либо к продолжению его, то всякая прямая, проведенная из сечения конуса (т. е. из какой-нибудь точки кривой сечения) параллельно к общей линии пересечения плоскостей до диаметра сечения, взятая в квадрате, будет равна площади, которую можно приложить к некоторой прямой (параметру), к которой диаметр сечения находится в таком отношении, в каком находится квадрат прямой, проведенной из вершины конуса параллельно диаметру сечения до основания треугольника, к прямоугольнику на отрезках, отсекаемых этой прямой по отношению к сторонам треугольника (на продолженном основании), если площадь имеет шириной прямую, отсекаемую ею (прямой, проведенной из точки кривой сечения) на диаметре от вершины сечения, причем недостает фигуры, которая подобна и расположена подобно прямоугольнику, образованному из диаметра и параметра. (Получившееся), таким образом, сечение называется эллипсом.

Пусть будет (дан) конус, вершиной которого пусть будет точка A (фиг. 2), а основанием круг BC, пусть будет произведено сечение его плоскостью через ось, и пусть сечением будет треугольник ABC, и пусть, кроме того, будет произведено сечение его другой плоскостью, которая пересекает каждую из (обеих) сторон осевого треугольника, но которая не параллельна ни основанию конуса, ни противосечению, и пусть эта плоскость образует на поверхности конуса сечение по линии DE (51). А линией пересечения секущей плоскости и плоскости основания конуса пусть будет ZH, перпендикулярная к BC, диаметром сечения пусть будет ED, и из (точки) E проведем EO′, перпендикулярно к ED, и через (точку) A проведем AK, параллельно ED и сделаем так, чтобы как (квадрат) на AK (относится) к (прямоугольнику) на BKC (т. е. на BK и KC), так DE (относилось) к EO′, и возьмем на линии сечения произвольную точку L и проведем через (точку) L (прямую) LM, параллельно ZH. Тогда я утверждаю, что LM, взятая в квадрате, равна площади, которая приложена к EO′ с шириной EM, если здесь не достает (или: если отсюда вычесть) (площади), подобной (прямоугольнику) на DEO.



Фиг. 2.

Действительно, проведем DO′ и через (точку) M проведем MXN параллельно O′E, а через (точки) O′, X проведем O′N, XO, параллельно EM, а через (точку) M проведем PMR, параллельно BC. Так как PR параллельна BC, а LM также параллельна ZH, то плоскость через LM, PR параллельна плоскости через ZH, BC, т. е. основанию конуса. Значит, если через LM, PR проведена плоскость, то в сечении получится круг, диаметр которого PR. И LM есть перпендикуляр к этому (диаметру). Следовательно, прямоугольник на PMR равен (квадрату) на LM. И как (квадрат) на AK относится к (прямоугольнику) на BKC, так ED относится к EO′, но отношение (квадрата) на AK к (прямоугольнику) на BKC состоит из (отношения AK) KB и (отношения) AK к KC; но, с одной стороны, как AK отно-

сится к KB, так EH к HB или EM к MP, а с другой, как AK относится к KC, так DH к HC или DM к MR. Таким образом отношение DE к (52) EO' складывается из отношения EM к MP и отношения DM к MR. Но отношение, составленное из отношения EM к MP и отношения DM к MR, равно отношению (прямоугольника) на EMD к (прямоугольнику) на PMR. Таким образом как (прямоугольник) на EMD относится к (прямоугольнику) на PMR, так DE относится к EO' или DM относится к MX. Но, как DM относится к MX, так, если прибавить общую высоту ME, относится (прямоугольник) на DME к прямоугольнику на XME. Следовательно, так же как (прямоугольник) на DME относится к (прямоугольнику) на PMR, так относится (прямоугольник) на DME к (прямоугольнику) на XME. Следовательно (прямоугольник) на PMR равен прямоугольнику на XME. Но было доказано, что прямоугольник на PMR равен (квадрату) на LM и, значит (прямоугольник) на XME равен (квадрату) на LM. Следовательно, LM в квадрате равна (площади) MO, которая приложена к $O'E$ с шириной EM, если от нее отнять площадь ON, подобную DEO'. Такое сечение пусть называется эллипсом, а EO' — параметром проведенных к DE по порядку (т. е. ординат), сама же (EO') пусть называется также еще перпендикулярно стоящей (стороной), а DE — поперечно лежащей (т. е. диаметром).

Пояснительные замечания. Заметим, прежде всего, что основанием BC конуса является круг. Следовательно, речь идет о наклонном круговом конусе, как в № I. (Не нарисованная) ось соединяет вершину A с центром основания. Однако осевой треугольник носит произвольный характер и, значит, вообще говоря, не перпендикулярен к основанию. Следовательно, линия пересечения HZ секущей плоскости с плоскостью основания перпендикулярна к продолжению BC, но не к плоскости ABC. То же самое относится к LM, которая перпендикулярна к PR, но не к ED. Поэтому ED представляет собой любой диаметр эллипса, а LM имеет соответствующее сопряженное направление (параллельно касательной в E). Уже в I, 7, Аполлоний доказал, что ED делит пополам все хорды LL'. Только в том случае, когда треугольник ABC перпендикулярен к основанию (т. е. когда плоскость его проходит через опущенную из A на основание конуса высоту), ED является одним из двух взаимно перпендикулярных диаметров (главных осей) конического сечения. Впрочем уже в I, 9, Аполлоний доказал, что сечением в

этом случае не может быть круг. Здесь же он доказывает характеристичную особенность эллиптического сечения (случаи параболы и гиперболы разобраны им уже ранее в I, 11 и I, 12).

Прежде всего проводят отрезок EO' (перпендикулярно к ED; на рисунке в плоскости его), удовлетворяющий условию:

$$EO':DC = BK\cdot KC:AK^2. \tag{1}$$

В таком случае должно иметь место равенство:

$$LM^2 = EO'\cdot EM - OO'\cdot EM = EO\cdot EM. \tag{2}$$

Это доказывается следующим образом. В круговом сечении PR (параллельном основанию):

$$LM^2 = PM\cdot MR. \tag{3}$$

Но

$$\frac{ED}{EO'} = \frac{AK^2}{BK\cdot KC} = \frac{AK}{BK}\cdot\frac{AK}{KC} = \tag{4}$$

$$= \frac{EM}{PM}\cdot\frac{DM}{MR} = \tag{5}$$

$$= \frac{EM}{PM}\cdot\frac{MD}{MR} = \tag{5a}$$

$$= \frac{DM}{MX} = \frac{DM\cdot ME}{MX\cdot ME}. \tag{6}$$

Значит

$$PM\cdot MR = XM\cdot ME = \tag{7}$$

$$= EO\cdot EM = \tag{7a}$$

$$= LM^2. \tag{8}$$

Проверив все эти выкладки, читатель сможет удостовериться в правильности всех решительно выводов, но остановится, вероятно, в недоумении перед конечным результатом. Во-первых, что, собственно, означает названная теорема?

По (5а):

$$PM\cdot MR = LM^2 = EM\cdot MD\cdot\frac{EO'}{ED}, \tag{9}$$

или

$$\frac{LM^2}{EM\cdot MD} = \frac{EO'}{ED} = \text{const}, \tag{10}$$

так как EO' и ED неизменные величины, между тем как L перемещается по кривой (а M — по ED). Свойство (10) — это дефиниторное свойство эллипса и оказывается обобщением соответствующего свойства круга, выраженного равенством (3) (const = 1). В указанном виде это свойство встречается уже у Архимеда (даже для косоугольных диаметров). Введем наши современные обозначения, положив (фиг. 3):

$$ED = d,\ EO' = p\,[1],\ EM = x,\ LM = y.$$

Тогда имеем равенство:

$$y^2 = \frac{p}{d} x (d - x) \qquad (11)$$

или

$$y^2 = px - \frac{p}{d} x^2, \qquad (11a)$$

Фиг. 3.

иначе говоря, уравнение эллипса, отнесенного к вершине его. Действительно, если взять уравнение эллипса (для косоугольных осей) в его обычной форме, отнесенное к центру эллипса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (12)$$

и если, перенеся ось y к вершине, положить:

$$X = x - a, \qquad (13)$$

то получится:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2. \qquad (14)$$

Имеем, таким образом, наряду с $d = 2a$:

$$p = \frac{2b^2}{a}. \qquad (15)$$

Теперь равенство (10) можно написать в виде:

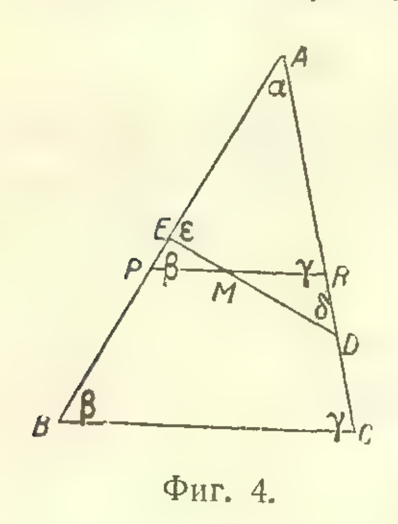
$$\frac{LM^2}{EM \cdot MD} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad (16)$$

[1] Правда, в настоящее время „параметром“ называют половину EO'. Но в тексте мы придерживаемся старинного обозначения. Слово „параметр“ в рассматриваемом смысле имеет своим источником сочинение о конических сечениях (Париж, 1631), написанное другом Декарта, Кл. Мидоржем (Mydorge). Сам же Аполлоний для обозначения соответствующего понятия пользуется описательным оборотом: „Отрезок, с помощью которого делают квадрат“, из правой стороны формулы (11) или (11a).

что знал уже и Архимед (по крайней мере, для случая взаимно перпендикулярных диаметров). При этом b и a представляют, разумеется, не половины главных осей, а половины косоугольных диаметров, соответствующих положению LM.

Если, таким образом, мы видим, как с помощью букв и употребления столь привычных для нас переменных x и y для обозначения отрезков, которые уже греки мыслили себе переменными, можно совершенно естественным путем притти к современным аналитико-геометрическим формулам, то все же в греческом способе изложения остается еще кое-что выяснить.

Прежде всего бросается в глаза странная фигура прямоугольника DO' с пересекающими его вдоль и поперек прямыми и оригинальный способ выражения, что у прямоугольника EN должен „недоставать" прямоугольник ON (существительное от глагола „недоставать" будет по-гречески „эллипс"; отсюда и название кривой). Но грекам этот способ выражения вовсе не был чужд. „Приложение площади" (по-гречески парабола) было вполне знакомо читателям Эвклида, и оно, вероятно, восходит к так называемым пифагорейцам. Так как греки не знали буквенной алгебры, то эти приложения площадей для них были выражением различных видов квадратных уравнений. Эвклид занимается этим в II, 5 и 6 для простейших случаев, когда x^2 не имеет коэфициентов (II томик № II), и в VI, 28 и 29 для общего случая. Мы должны здесь отказаться от намерения воспроизвести это; заметим только, что, если вместо недостатка имеется „избыток" (по-гречески—гипербола), то у члена с x^2 коэфициент положительный. В случае простого приложения площади член с x^2 отсутствует (Эвклид, 1, 44).



Фиг. 4.

Но читателю все еще трудно будет понять, каким путем Аполлоний приходит к параллельной прямой AK и затем, с помощью различных подобных треугольников—к тому, что приводит к равенству (10), выражающему в простейшей форме сущность дела. Однако современный читатель без труда поймет, что, если отношение на левой стороне равенства, действительно, постоянно, то оно зависит только от углов фигуры, в конечном счете — от трех углов $\alpha, \beta, \varepsilon$ (фиг. 4). Нетрудно убедиться, что

$$\frac{PM}{EM}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta}, \tag{17}$$

$$\frac{MR}{MD}=\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}, \tag{18}$$

Значит,

$$\frac{PM\cdot MR}{EM\cdot MD}=\frac{\sin\varepsilon\sin\delta}{\sin\beta\sin\gamma}, \tag{19}$$

или

$$\frac{LM^2}{EM\cdot MD}=\frac{\sin\varepsilon\sin(\alpha+\varepsilon)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}=\text{const}. \tag{20}$$

Если положить $ED=d$, то

$$p=\frac{\sin\varepsilon\sin(\alpha+\varepsilon)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}d. \tag{21}$$

Так как Аполлоний не может прибегнуть к ресурсам тригонометрии, то он вынужден оперировать исключительно геометрическими методами, что приводит к несколько растянутому, многословному изложению. В действительности же дело очень просто. Мы можем только удивляться тому, как греки, не зная ни алгебры ни тригонометрии, и, значит, пользуясь примитивными, на наш взгляд, методами геометрии, сумели сделать столь блестящие открытия. И не только отдельные открытия, но также построенные с исключительной тонкостью системы открытий, какими являются „Начала“ Эвклида и „Конические сечения“ Аполлония.

IV

Ферма вводит координаты. Уравнение прямой

Из „Ad locos planos et solidos isagoge“ П. де-Ферма. „Oeuvres de Fermat“, éd. P. Tannery et Ch. Henry. Tome I, Paris MDCCCXCI, p. 91—103. Франц. перевод П. Таннри в „Oeuvres“ III, Paris 1896, p. 85—96. Немец. перевод Вилейтнера „Einführung in die ebenen und körperlichen Örter“ („Ostwalds Klassiker“, № 208), Лейпциг 1923.

Оригинал стр. 91... Поэтому мы применим к этой отрасли науки (именно к учению о местах) особенный и подходящий специально для нее анализ для того, чтобы в будущем изучение ее стало для всех доступным.

Если в каком-нибудь заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, то налицо имеется место, и конечная точка одной величины описывает прямую или кривую линии...

Но уравнениям можно придать наглядный вид, если поместить обе неизвестных величины в некотором заданном угле,

который, большей частью, мы будем принимать равным прямому и если задать положение и конечную точку одной из величин...

Пусть *NZM* будет данная по положению прямая (фиг. 5), *N* — неизменная точка на ней. Пусть *NZ* равняется неизвестной величине *A*, и пусть отрезок *ZI*, образующий с ней заданный угол *NZI*, равняется другой неизвестной величине *E*. Если затем:

D на *A* равно *B* на *E*,

то точка *I* находится на заданной по положению прямой. Действительно,

как *B* относится к *D*, так *A* относится к *E*.

Поэтому отношение *A* к *E* дано (неизменно), и так как, кроме того, задан угол при *Z*, то известен вид треугольника *NIZ*, а, значит, и угол *INZ*. Но точка *N* дана, и прямая *NZ* известна по положению. Следовательно, дано положение *NI*, и легко произвести синтез.

Фиг. 5.

К этому уравнению можно свести все уравнения, члены которых частью даны, частью содержат в себе неизвестные *A* и *E*, — независимо от того, умножены ли эти последние величины на какие-нибудь заданные величины или же даны просто.

Пусть *Z* pl. — *D* на *A* равно *B* на *E*.

Если положить *D* на *R* равным *Z* pl., то как *B* относится к *D*, так *R* — *A* к *E*.

Если мы примем *MN* равным *R*, то точка *M* будет дана, и, значит, *MZ* равно *R* — *A*. Поэтому известно отношение *MZ* к *ZI*. Но так как угол при *Z* задан, то известен вид треугольника *IZM*, и заключаем, что прямая *MI* дана по положению. Следовательно, точка *I* находится на данной по положению прямой. То же самое получается без труда для всякого уравнения, в котором встречаются члены с величинами *A* или *E*.

Это — простое и первое уравнение места, с помощью которого можно найти все прямолинейные места.

Пояснительные замечания. Небольшое сочинение Ферма возникло, приблизительно, около 1636 г. в результате продолжительных его занятий геометрическими местами. Но оно осталось ненапечатанным и было известно лишь в кругу париж-

ских математиков до тех пор, пока сын Ферма, Самуил, не издал в 1679 г. в Тулузе „Varia Opera“ своего отца (там оно помещено на стр. 2—11). Но это, вышедшее столь поздно, издание не соответствовало в точности оригиналу. Издание Таннри и Анри более верно, ибо в их распоряжении находилась более старая рукопись. Но у Ферма, наверное, еще не было отдельных строчек для уравнений, которые мы оставили, согласно тексту издания. Ферма находится еще в полной зависимости от Виеты. Какую-нибудь величину он способен представить себе по образцу древних только в виде отрезка. Он ставит себе задачу изобразить графически уравнение с двумя неизвестными (quantitates ignotae; выражение „переменная“ вошло в употребление лишь позже). Это совершенно ново постольку, поскольку относится определенно к уравнениям и к их систематическому изображению при помощи кривых. Уже греки решали ряд задач с помощью пересечения кривых, и после них так поступали мусульманские ученые [в особенности Омар Алхайям (Alchajjám), около 1100 г.]. Недоставало только буквенной алгебры. С современной точки зрения, казалось, было бы нетрудно перевести геометрические рассуждения на язык алгебраической символики. Между тем, в конце рассматриваемого сочинения Ферма высказывает сожаление, что он еще не был знаком с новым методом, когда занимался восстановлением текста „Плоских мест“ Аполлония (т. е. геометрических мест, приводящих к прямым и окружностям).

Вводя свое графическое изображение, Ферма берет одну ось для абсцисс (как мы теперь выражаемся), а на ней исходную точку для отсчета их, затем направление ординат, которые всякий раз наносятся из соответствующей точки оси. Таким образом у него собственно еще нет оси ординат, а также отрицательных ординат (и тем менее — отрицательных абсцисс). Эти последние применялись, так сказать, только бессознательным образом, поскольку знакомые кривые рисовали целиком, не ломая себе головы над тем, можно ли изобразить одним и тем же уравнением все части. В случае незнакомых кривых впоследствии возникали часто недоразумения по поводу их вида. Все эти затруднения насчет знаков были окончательно преодолены лишь в ньютоновом монументальном сочинении о кривых третьего порядка (напечатано в 1704 г.).

Вместо букв A и E, которыми пользуется Ферма по образцу Виеты, мы введем наши x, y; тогда первое, рассматриваемое Ферма, уравнение гласит:

$$Dx = By, \text{ или } x : y = B : D.$$

Он показывает, что уравнение это представляет прямую, проходящую через начальную точку N. „Синтез“ (по лат. Compositio), о котором он говорит, представляет антитезу анализу и означает обращение задачи, т. е. означает требование отыскать уравнение, когда прямая задана по положению.

Затем Ферма переходит немедленно к рассмотрению общего линейного уравнения и показывает, что соответствующим местом является всегда прямая. Уравнение это гласит:

$$Z - Dx = By$$

При Z приписано pl(anum) = площадь, дабы сохранить однородность уравнения в геометрическом смысле. Действительно, Dx и By — прямоугольники, следовательно, и Z должно означать величину размерности площади (ср. у Виеты в I томе, № XVIII). Ферма полагает:

$$Z = DR,$$

и получает, как мы бы написали:

$$D(R - x) = By,$$

или, пользуясь более привычным для Ферма способом выражения:

$$B : D = (R - x) : y.$$

Ему нетрудно показать, что это представляет, опять-таки, прямую. Но это далеко еще не равнозначно, вопреки утверждению Ферма, интерпретации всякого линейного относительно A и E уравнения. Действительно, прошло еще не мало времени, пока решились писать и анализировать уравнения вида:

$$x + y + 3 = 0,$$

так как еще не знали, что делать с отрицательными отрезками.

Конические сечения, в противоположность прямым и окружностям, назывались „пространственными местами“, потому что первоначально они были получены с помощью сечения, произведенного на некотором теле.

V

Первая форма уравнения эллипса

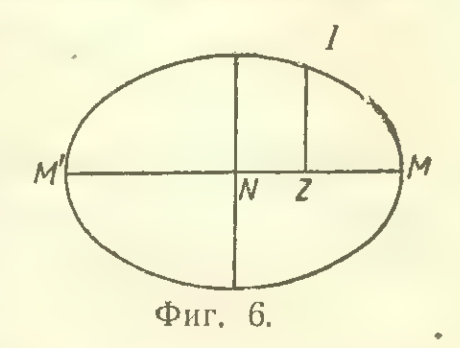
Из „Isagoge“, Ферма (см. № IV).

Оригинал стр. 99. Если $Bq. - Aq.$ имеет данное отношение к $Eq.$, то точка I находится на эллипсе.

Возьмем MN, равное B (фиг. 6), и проведем эллипс с вершиной M, диаметром (вернее — прямой диаметра) NM и центром N (эллипс), ординаты которого (по лат. applicatae,

сокращенное от „ordinatim applicatae", представляющего прямой перевод соответствующего выражения Аполлония) параллельны прямой ZI, и пусть квадраты ординат имеют заданные отношения к прямоугольнику на отрезках диаметра. Тогда точка I находится на таком эллипсе. Действительно, квадрат NM — квадрат NZ равен прямоугольнику на отрезках диаметра.

К этому (уравнению) приводятся сходные уравнения, имеющие на одной стороне $Aq.$, а на другой $Eq.$ с противоположным знаком (affectionis nota), причем у этих членов различные коэфициенты[1]. Действительно, если бы коэфициенты были равны между собой и угол был бы прямым, то местом была бы, как уже сказали, окружность. Если же угол не прямой, то и при равных коэфициентах местом является эллипс. Если в уравнении имеются, кроме того, еще члены с произведениями из A и E на данные величины, то можно произвести приведение с помощью указанного приема.



Фиг. 6.

Пояснительные замечания. Сперва несколько слов о символике Ферма, примыкающей тоже целиком к символике Виеты. Из алгебраических знаков Ферма имеет только появившиеся в Германии в конце XV в. знаки $+$ и $-$. Правда, он, кроме того, еще более сокращает аббревиатуру „quadr.", введенную Виетой (хотя иногда это делалось уже и другими учеными[2]). Но слова для обозначения понятия „равно" выписываются им еще целиком. Не имеется также никакого сокращения для пропорций. В вышеприведенном тексте я (в противоположность напечатанному переводу) строго придерживался формы начертания Ферма.

На языке нашей символики данное Ферма для эллипса уравнение гласит:

$$\frac{B^2 - x^2}{y^2} = \text{const} = k,$$

или также:

$$x^2 + ky^2 = B^2.$$

В случае косоугольных осей уравнение это, даже при $k = 1$, представляет эллипс, если только k положительно.

---

[1] Слово это сочинено Виетой (1591).

[2] Сам Виета писал иногда Q вместо „quadratum" (см. вып. I, № XVIII).

Нетрудно понять, каким образом Ферма пришел к этому уравнению. Как мы уже знаем, он мог у Архимеда найти (см. выше, № III), что у эллипса, как видно из нашего рисунка (его у Ферма нет):

$$\frac{ZM \cdot ZM'}{ZI^2} = \text{const} = k.$$

Но это дает, как он сам говорит:

$$\frac{(B - x)(B + x)}{y^2} = k,$$

а, значит, и вышеприведенное уравнение. Ферма утверждает далее, что он в состоянии привести к указанной нормальной форме всякое уравнение вида:

$$2x^2 + 3y^2 + 5x + 7y = 4 \text{ [1]}.$$

Я нарочно не беру общих коэфициентов, так как их нет и у Ферма (хотя мысль о них уже и носилась в воздухе) (ср. с Виетой, вып. I, № XVIII). В рассматриваемом случае дело сводится только к параллельному перенесению координат, которое, как мы видели, Ферма производит в случае прямой. Перед этим он произвел это перенесение для общего уравнения окружности. Правда, коэфициенты при x^2 и y^2 равнялись в этом случае единице. В рассматриваемом случае Ферма поступил бы, конечно, так:

$$4x^2 + 10x + 6y^2 + 14y = 8,$$

$$\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 + 6y^2 + 14y = 8 + \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$6\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 + 36y^2 + 84y = \frac{171}{2},$$

$$6\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(6y + 7\right)^2 = \frac{269}{2},$$

[1] Разумеется, Ферма никогда не написал бы этого уравнения в таком неоднородном виде (не касаясь уже вопроса о нашей современной форме начертания его), а прибавил бы к членам x и y еще некоторые отрезки в качестве множителей а к постоянному члену величину размерности площади (см. выше № IV). Это относится и к следующему за этим преобразованию. Употребление неоднородных уравнений с геометрическим содержанием является целиком делом Декарта, введшего отрезок-единицу, что до этого случайно встречается лишь у Бомбелли (Bombelli 1572) (см. вып. I, № XVII).

и, наконец, если положить:

$$2x+\frac{5}{2}=X,\ \ 6y+7=Y;\quad 6X^2+Y^2=\frac{269}{2}.$$

Разумеется, Ферма должен был бы выразить это как-нибудь с помощью слов. Но, несомненно, он сумел бы это сделать, хотя у него не встречается аналогичного примера. Но мне не совсем ясно, сумел ли бы он правильно представить себе необходимое в этом случае параллельное перенесение координат $\left(\text{оси } y \text{ на } -\frac{5}{4},\right.$ $\left.\text{оси } x \text{ на } -\frac{7}{6}\right)$. И в приводимом им примере с окружностью необходимо такое отрицательное перенесение, но у Ферма не имеется здесь никаких пояснений. В вопросах этого рода, мало привычных тогда даже для величайших математиков, к которым относится Ферма, надо быть очень осторожным и ограничиваться лишь тем, что действительно написано у рассматриваемого автора.

В случае гиперболы Ферма дает уравнения: $xy=\text{const}$ и $(x^2+B^2):y^2=\text{const}$, в случае параболы: $x^2=Dy$ (а также $y^2=Dx$), — дает их всегда вместе с требуемыми параллельным перенесением осей (линейным преобразованием) обобщениями.

Таково, в основном, содержание „Isagoge". Об эффективности новых методов Ферма можно судить по некоторым примерам из „Плоских мест" Аполлония, где он легко добивается результатов величайшей степени общности.

„Isagoge" Ферма не получило, повидимому, известности, и влияние его было невелико, ибо вскоре появилась „Геометрия" Декарта. Хотя ознакомление с ней представляло для современников более значительные трудности благодаря ее новой алгебраической форме, но, представляя печатное произведение, оно немедленно попало в руки многочисленных читателей, было переведено на другие языки и стало предметом комментариев, так что с него, собственно, начинается новая аналитическая геометрия (см. следующий номер).

VI

Декарт вводит координиаты. Установление одиого уравиения гиперболы

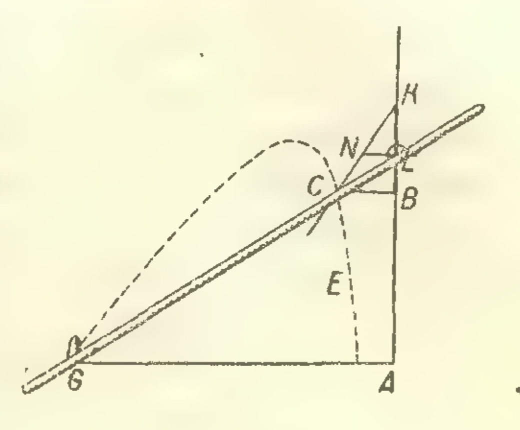
Из „La Géometrie", приложения к появившемуся без указания имени автора труду Рене Декарта „Discours de la Methode...", Leyde 1637, стр. 295—413. Перепечатано в точности в „Oeuvres", éd. Ch. Adam et P. Tannery, т. VI, Париж 1903, стр. 367 — 485. Издание на современном

французском языке и с более современным начертанием формул, Париж 1886. Латинские переводы появились в 1649, 1659 гг. и позднее. Немецкий перевод Л. Шлезингера (Schlesinger), изд. 2. Лейпциг 1923.

Предварительные замечания. Нижеследующее — не первое место „Геометрии“, где Декарт вводит координаты. Но ввиду того, что первый приводимый им пример занимает слишком много места, он неудобен для перепечатки его здесь. Заметим только следующее. В первом примере Декарта, служащем ему, так сказать, парадигматическим примером, берется несколько заданных неизменных прямых, к которым проводятся из некоторой точки C прямые, каждая под некоторым определенным углом. Затем дается некоторое условие, и отыскивается геометрическое место точки C. Чтобы освободиться от хаоса этих линий, продолжает затем Декарт, он берет в качестве главных линий две из них — именно одну заданную, неизменную, и другую — искомую. Отрезки AB на неизменной линии, имеющие все одну и ту же начальную точку A, он называет x, а (параллельные друг другу) отрезки BC называет y. Затем он получает уравнение, содержащее x, y и известные отрезки. Теперь можно одной из обеих величин x, y, например y, приписывать бесконечное множество значений, в соответствии с чем из уравнения получится бесчисленное множество значений для x. Нижеследующий пример он приводит, чтобы показать, как находят „genre“ (род) какого-нибудь геометрического места. При этом он объединяет первую и вторую степени в первый genre, третью и четвертую степени — во второй genre и т. д., что хотя и не имеет никакого смысла, но для нас здесь не существенно.

Стр. 319. Например я хочу знать, какого рода (genre) линия EC, которую я представляю себе описанной пересечением (320) линейки GL и прямолинейной плоской площадки $CNKL$ (фиг. 7), сторона KN которой продолжена неопределенно далеко (indéfiniment) по направлению к C и которая движется прямолинейно по лежащей под ней плоскости и движется так, что ее диаметр KL всегда находится на каком-нибудь месте линии BA, продолженной в обе стороны, причем линейка GL движется кругообразно вокруг точки G, ибо она соединена с ней (площадкой) так, что всегда проходит через точку L. Я выбираю какую-нибудь прямую, например AB, чтобы относить к различным точкам ее все (точки) этой кривой линии EC, и на этой линии AB я выбираю какую-нибудь точку, например A, чтобы начинать от нее этот отсчет (ce calcul). Я говорю, что я „выбираю“ и то и другое, ибо их можно взять

по произволу. Действительно, хотя надо производить весьма тщательный выбор, чтобы получить возможно более краткое и простое уравнение, но все же безразлично, как сделать этот выбор, ибо всегда можно добиться, чтобы линия была того же самого рода. Это можно легко доказать (321). Теперь я беру на кривой любую точку, например C, на которую установлен служащий для описания кривой инструмент, и из этой точки C я провожу линию CB параллельно GA, и так как CB и BA представляют две неопределенные и неизвестные величины, то я называю одну y, а другую x. Но, чтобы найти отношение одной из них к другой, я рассматриваю также известные величины, служащие для описания этой кривой линии, как GA, которую я называю a, KL, которую я называю b, и NL, параллельную GA, которую я называю c. Затем я говорю, что как NL относится к LK, или c к b, так относится CB, или y к BK, которая, следовательно, равна $\frac{b}{c}y$; а BL равна $\frac{b}{c}y-b$ и AL равна $x+\frac{b}{c}y-b$. Кроме того, подобно тому, как CB относится к LB, и и y к $\frac{b}{c}y-b$, так AG, или a, относится к AL, или к $x+\frac{b}{c}y-b$. Следовательно, если перемножить второй и третий (члены пропорции) (322), то получится $\frac{ab}{c}y-ab$, что равно $xy+\frac{b}{c}yy-by$, получающемуся от перемножения первого и последнего (членов). И, таким образом, искомое уравнение будет:



Фиг. 7.

$$yy \propto cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac,$$

откуда мы видим, что линия EC — первого рода, и, действительно, она — не что иное, как гипербола.

Пояснительные замечания. Относительно общего характера декартовой „Геометрии" я должен ограничиться ссылкой

на свою более крупную работу: „Geschichte der Mathematik“ II Teil, 2. Hälfte, Berlin 1921, стр. 5 и сл. Декарт вводит координаты совершенно таким же образом, как Ферма. У него имеется неизменная ось, а на ней начальная точка для абсцисс, как мы выражаемся, и он измеряет ординаты от их оснований на оси в известном направлении до точки на кривой. Специально Декарту принадлежит употреблявшийся им уже и раньше способ выражения, согласно которому „точки кривой (с помощью ординат) относят (как бы проицируют) к точкам некоторой прямой (оси абсцисс)“. Координаты могут и в рассматриваемом примере быть расположены косо друг относительно друга. На чертеже, однако, они взаимно перпендикулярны. Способ построения гиперболы мы вкратце выразили бы следующим образом. Проведи произвольным образом GL, возьми $LK = b$ и проведи KC под некоторым постоянным углом $\varkappa$, для которого $\operatorname{ctg} \varkappa = \frac{b}{c}$. Указываемое построение можно рассматривать как пересечение пучка прямых с центром G и пучка параллельных прямых с направлением KC, отнесенного проективно к первому пучку. Ясно что при этом должна получиться гипербола, ибо главные точки обоих пучков должны принадлежать к получаемой кривой, а, между тем, одна из этих точек лежит в бесконечности. При выводе уравнения мы поступили бы так же, как и Декарт, с той лишь разницей, что мы ввели бы $\varkappa$. Ограничиваясь, по обыкновению, указаниями общего характера, Декарт не интересуется уже больше вопросом о виде всей гиперболы в целом. Этим занялись впоследствии его комментаторы. Он хотел только показать, как находят уравнение геометрического места и вместе с тем его genre. Новизна вышеприведенного примера, а также общность первого из приводимых им примеров, показывают, как основательно Декарт владел уже своим методом. Но, разумеется, это не было какое-то внезапное озарение свыше. Наоборот, Декарт уже с 1619 г. занимался вопросом об усовершенствовании вообще аналитических методов. Это видно по его алгебраической символике, до мелочей совпадающей с нашей теперешней символикой. Насчет знака равенства см. вып. I, № XXI. Обозначения x, y ввел сам Декарт. В самом же начале своей работы он заявляет, что неизвестные он будет обозначать последними буквами алфавита, а известные — первыми буквами его, и в начале он пользуется чаще z, чем y и x. Но вряд ли удастся установить, почему для обозначения координат он выбрал, именно, x, y, а скажем, не z, y (см. также вып. I, № X).

Большой интерес представляет его замечание, что genre, а, значит, и уравнение кривой, не изменится при другом выборе координат. Мы уже видели у Ферма, что он вполне разбирался в вопросе о параллельном перенесении осей координат. Это, без сомнения, можно сказать и о Декарте, хотя у него нет ни одного соответствующего примера. Но мы имеем основание сомневаться в том, что Декарт владел также и случаем с вращением осей координат, несмотря на его замечание, что это легко доказать. Но, как бы то ни было, чутье у Декарта было правильное.

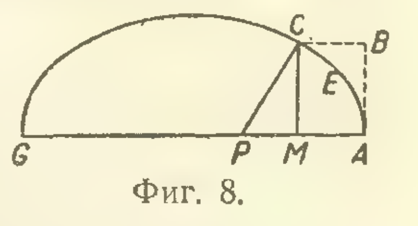
Д. Е. Смит (Smith) и Марчиа Л. Латам (Latham) выпустили в свет издание-факсимиле оригинала с английским переводом (The Geometry of René Descartes, Chicago 1925.)

VII.

Нормаль к эллипсу

Из декартовой «Géometrie» (см. № VI).

Стр. 342. Пусть CE кривая линия (фиг. 8), требуется провести через точку C прямую линию, образующую с ней прямые углы. Я предположу, что требование уже выполнено, и пусть искомой линией будет CP. Я продолжу ее до точки P, где она пересекает прямую GA, которую я приму за ту прямую, к точкам которой относят (точки) линии CE. Следовательно, если я положу MA или $CB \propto y$, CM или $BA \propto x$, то я получу некоторое уравнение, выражающее отношение между x и y. Затем я полагаю: $PC \propto s$ и $PA \propto v$, или $PM \propto v - y$, и в прямоугольном треугольнике PMC я имею ss, квадрат основания, равным $xx + vv - 2vy + yy$, т. е. равным квадратам обеих сторон, иначе говоря, я имею: $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, или также: $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, и с помощью этого уравнения я удаляю из другого уравнения, выражающего отношение всех точек кривой CE к точкам прямой GA, одну из двух неопределенных величин x или y. Это можно легко сделать, подставив повсюду $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ вместо x и квадрат этой суммы вместо xx и куб ее вместо x^3 и т. д., если я желаю удалить x; или же (343), если я желаю удалить y, то я подставляю на его место $v + \sqrt{ss - xx}$, и квадрат или куб этой суммы на место yy



Фиг. 8.

или y^3 и т. д. Таким путем всегда получается уравнение, в котором имеется только одна неопределенная величина x или y.

Пусть, например, CE будет эллипсом, а MA — отрезком его диаметра [1], к которому принадлежит CM как ордината (appliquée par ordre; дословный перевод с латинского), и пусть r будет его перпендикулярной стороной (параметром, лат. latus rectum; см. выше, № III) и q его поперечной (стороной) (диаметром, latus transversum). Тогда, согласно 13-й теореме 1 книги Аполлония, имеем: $xx \propto ry - \frac{r}{q} yy$, и если удалить отсюда xx, то получается $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q} yy$, или же

$yy \frac{+ qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ равно ничему [2]. Ибо в этом случае лучше рассматривать всю сумму в целом, чем приравнивать одну часть ее другой [3].

Затем Декарт разбирает, прежде всего, еще два других примера того же рода. После этого у него следует рассуждение (стр. 345—347), содержание которого мы передадим здесь вкратце. Получив конечное уравнение, содержащее y, v, s, представляют себе, что v и s даны. В таком случае окружность с радиусом $s = PC$ пересечет кривую, вообще говоря, в двух точках (по крайней мере, по близости от C), если только PC не есть в точности нормаль (в этом случае окружность соприкасается с кривой). Это в вышеприведенном уравнении выражается в том, что оно квадратное по отношению к y. В случае же, если PC есть сама нормаль, квадратное относительно y уравнение должно иметь два равных корня (в случае высших степеней уравнение имеет, на ряду с двумя равными корнями, еще другие, отличные от них, корни). Затем только появляется снова на сцену пример с эллипсом.

---

[1] То есть абсциссой; но в качестве технического термина это слово появляется, собственно, только у Лейбница (1675). У Декарта в этой главе имеется еще более общий рисунок, не лишенный, однако, неточностей и для нас ненужный.

[2] Я перевожу таким образом ибо и Декарт различает „rien“ и „nul“, хотя в конечном счете оба эти слова означают одно и то же.

[3] Интересное указание на преимущество приведенного, как мы выражаемся, к нулю уравнения. До Декарта это делалось лишь случайно и непреднамеренно.

Стр. 347 .. Так, например, я утверждаю, что первое найденное нами выше уравнение, именно:

$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$, должно иметь тот же самый вид, какой получается, если e приравнять y и $y - e$ помножить на само себя, что дает $yy - 2ey + ee$. Вследствие этого можно сравнить меж собой в отдельности все члены обоих уравнений и утверждать, что, так как первый (член) yy тот же самый в одном (уравнении), что и в другом, то и второй (член), который в одном уравнении есть $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$, будет равен второму (члену) второго уравнения, именно $-2ey$. Поэтому, если отыскивают величину v, именно линию PA, то имеют: $v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, или же, так как мы e приравняли y, $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. И таким же образом можно было бы найти s при помощи третьего члена $ee \propto \frac{qvv - qss}{q - r}$; но так как величина v достаточно определяет точку P, которую мы только и ищем, то дальше делать нечего.

Пояснительные замечания. Это вычисление нормали (а значит, если желательно, касательной) эллипса тем интереснее, что в настоящее время им больше не пользуются. Но надо принять во внимание, что мы здесь находимся в эпоху первых попыток этого рода и что диференциальное исчисление, давшее принципиальное решение подобных вопросов, было открыто лишь около 1670 г. Перед приведенным нами здесь отрывком Декарт подробно доказывает важность решения вопроса о направлении кривой в каждой точке ее. Но в случае высших кривых выкладки по методу Декарта становятся очень громоздкими. Так называемый метод неопределенных коэфициентов, т. е. сравнение коэфициентов двух тождественных уравнений, Декарт открыл в связи с этим вопросом, применив его затем и к более сложным случаям.

В вышеприведенном случае мы бы в настоящее время просто сказали, что, так как уравнение с y должно иметь два равных корня, то его левая сторона (которую Декарт просто называет „уравнением“) представляет чистый квадрат; поэтому y равно половине коэфициента при y в первой степени со знаком минус, т. е.

$$y = -\frac{qr - 2qv}{2q - 2r}.$$

Если решить это уравнение относительно v, то получится то же самое, что у Декарта.

То обстоятельство, что Декарт берет уравнение эллипса в точности по Аполлонию, 1, 13 (см. выше, № III), дает ясное указание на происхождение аналитической геометрии. Алгебра уже достаточно созрела к этому времени, чтобы можно было перевести на ее язык греческую геометрию. Нужны были только гениальные люди, которые совершили бы это. Любопытно, что Декарт еще не сделал определенного выбора для обозначения абсцисс через x. Этого не сделали и его ближайшие преемники. Если мы произведем все выкладки по нашему способу, то мы станем исходить из уравнения эллипса

$$x^2 = ry - \frac{r}{q} y^2.$$

Поэтому уравнение касательной в точке X, Y кривой будет:

$$xX = \frac{r}{2}\left(y + Y\right) - \frac{r}{q} yY,$$

или

$$xX = y\left(\frac{r}{2} - \frac{r}{q} Y\right) + \frac{r}{2} Y.$$

Уравнение перпендикулярной к ней прямой будет:

$$x\left(\frac{r}{2} - \frac{r}{q} Y\right) = -yX + k.$$

Прямая, параллельная этой прямой и проходящая через точку X, Y, иначе говоря, нормаль к кривой в C, имеет поэтому уравнение:

$$\left(x - X\right)\left(\frac{r}{2} - \frac{r}{q} Y\right) = -\left(y - Y\right) X.$$

Чтобы получить точку P, надо положить в этом уравнении $x = 0$, тогда $y = AP$ будет:

$$y = \frac{r}{2} - \frac{r}{q} Y + Y,$$

что в точности совпадает с декартовым равенством:

$$v = y - \frac{r}{q} y + \frac{r}{2}.$$

Читатель сам сумеет разобраться в других частностях способа изложения и вычисления Декарта. Укажем, например, еще на то,

что Декарта не интересует вовсе вопрос о получении „уравнения" нормали или касательной, он довольствуется геометрическим определением их. Только в конце XVIII в. стали систематически рассматривать уравнения прямых.

VIII

Гипербола, отнесенная к своим асимптотам

Из „Florimondi De Beaune in Geometriam Renati Des Cartes Notae breves", впервые вышедших в качестве приложения к латинскому переводу декартовой „Геометрии": „Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem cum Notis Florimondi De Beaune, ..In linguam Latinam versa & commentariis illustrata, Operâ atque studio Francisci a Schooten,..." Lugduni Batavorum (Лейден) CIϽ IϽC XLIX (1649). Значительно дополненное издание, Амстердам 1659.

Стр. 142 (изд. 1659, стр. 126 и сл.). Но, если в уравнении не имеется ни x^2 ни y^2, а xy — этот случай не встречается ни в уравнении проблемы Паппа[1], ни может быть связан с формулой, получаемой из этой (проблемы) (143), — то это может вызвать некоторые трудности, которые мы и хотим поэтому устранить.

Подобное уравнение содержит, самое большее 4 члена, именно, один с x без y, другой с y без x, третий с xy и, наконец, четвертый, в котором нет ни x, ни y. Все многообразие случаев сводится к 17 формулам уравнений и построений, помещенным на одной из следующих страниц (именно 145)[2]. С их помощью можно увидеть, каким образом рассматриваемое (геометрическое) место постоянно приводит к гиперболе, а также, что неопределенные линии[3] суть асимптоты или параллельны последним.

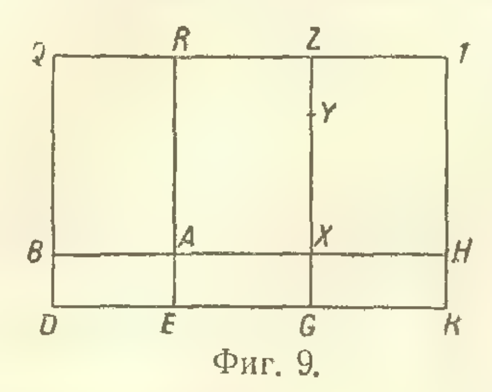
Пусть, действительно, дана по положению линия BH (фиг. 9), и возьмем на ней точку A. Примем линию AX за x, проведем линию XY, которую мы примем за y, причем она может образовать с AX любой угол, и продолжим ее без-

[1] Это первый, рассмотренный Декартом большой пример (см. выше, № VI). В полученном там уравнении конического сечения нет того частного случая, когда xy входит без x^2 и y^2.

[2] 17-е уравнение, рассматриваемое в основном тексте, гласит: $xy + cy + bx - df \propto 0$. Из него получаются остальные 16, если взять b, c, d с другими знаками или принимать их равными 0. Но отсутствуют все те формы, в которых сумма положительных членов равна нулю, так как Дебон, разумеется, не помышляет об отрицательных x y.

[3] Он имеет в виду направления x, y, т. е., как мы бы сказали, направления осей.

гранично. Затем проведем параллельно к BH линии DK[1]..., так что DK будет внизу BH...Проведем также линии QD, RAE..., параллельно XY или ZG, так что линия QD пересекает линию XA, если последнюю продолжить за A (144). Если все это сделано и если описать, согласно 4-й теореме



Фиг. 9.

II книги Апполония о конических сечениях гиперболу[2], которая проходит через точку Y и асимптоты которой суть те линии, к которым относится любое из построений (17 случаев) (в данном случае DQ, DK), то, согласно теореме 12-й той же самой книги[3], ясно, что все прямоугольники, построенные одинаковым образом по отношению к этим линиям, равны между собой. Таким образом остается только доказать, что асимптоты и прямоугольник каждого из (17) уравнений были правильно построены.

Построим, поэтому, гиперболу, согласно последнему (17-му) уравнению ($xy + cy + bx - df \propto 0$); пусть она проходит через точку Y, и пусть асимптоты будут DQ и DG; далее, пусть прямоугольник на отрезках DG и GY равняется данному прямоугольнику (т. е. прямоугольнику, равному) $df + bc$. Если, таким образом, мы сделали, согласно построению, линии $AX \propto x$, $XY \propto y$, $AB \propto c$, BD или $XG \propto b$, то BX или DG равно $x + c$, а GY (равно) $y + b$. Если перемножить их между собой, то получится $bc + bx + cy + xy$ для прямоугольника на отрезках DG, GY, равного, с другой стороны, также $df + bc$. Если теперь отнять у обеих сторон общий прямоугольник bc, то останется $xy + cy$ (146) $+ bx \propto df$, т. е. заданное уравнение. Аналогичным образом можно дать доказательство для прочих уравнений и построений.

---

[1] У Дебона есть ряд других прямых линий для тех разных случаев из 17, в которых b, c, d, f не имееют одного и того же значения на рисунке. Я оставляю выше лишь те линии и буквы, которые относятся к рассматриваемому в основном тексте случаю.

[2] Там показывается, как построение гиперболы по двум асимптотам и одной точке может быть приведено к первоначальному определению гиперболы.

[3] Теорема эта гласит у Аполлония самым общим образом: если провести из какой-нибудь точки гиперболы отрезки к каждой асимптоте в направлении, постоянном для соответствующей асимптоты, то произведение обоих отрезков постоянно.

Впрочем мы могли бы свести все многообразие этих уравнений к меньшему числу их, если бы мы превратили одну из неопределенных величин в другую (поэтому уравнения, допускающие эту замену, мы расположили по порядку друг за другом)[1]. В этом случае мы могли бы включить также построение тех (уравнений), в которых не имеются налицо все четыре члена, в число тех уравнений, у которых даны все (члены). Но, так как нам пришлось бы тогда высказаться гораздо более подробно и вопрос был бы менее ясным, то мы предпочли воспользоваться изложенным методом.

Пояснительные замечания. Уже в 1639 г. Дебон[2] послал Декарту свои примечания и дополнения к декартовой „Геометрии". Декарт одобрил их. В то время было еще совершенно необычным явлением, чтобы философские или математические труды, вроде декартова „Discours" с его приложениями, выходили на каком-нибудь национальном языке (который был бы в этом случае непонятен для ученых иной национальности). Поэтому в скором времени Ф. фан-Скаутен (Schooten) из Лейдена приступил к латинскому переводу „Геометрии", снабдив его собственными комментариями.

К этому изданию были присоединены примечания Дебона тоже в латинском переводе.

И Дебон, как мы видим, непосредственно примыкает к Аполлонию, и он также не отдает себе еще полного отчета в знаках координат, но, с другой стороны, у него наблюдается непривычная в наше время общность при выборе угла координат (хотя на чертеже он нарисован прямоугольным), что тоже восходит к Аполлонию.

Интерес представляет еще заключительный абзац, где Дебон говорит, что он мог бы, собственно, написать только одно уравнение (именно 17-е) и вывести из него все остальные формы, — точно так, как поступили бы мы в настоящее время. Но для тогдашнего времени такой подход к вопросу носил еще слишком общий характер и был, поэтому, слишком труден. Правда, уже Декарт поступил таким образом в случае так называемой проблемы Паппа.

---

[1] Скобки в оригинале. Так, например, расположены друг за другом $xy + cy \propto bx$ и $xy + bx \propto cy$.

[2] Имена такого рода пишут теперь, большей частью, как одно слово, между тем как в те времена их обыкновенно писали раздельно.

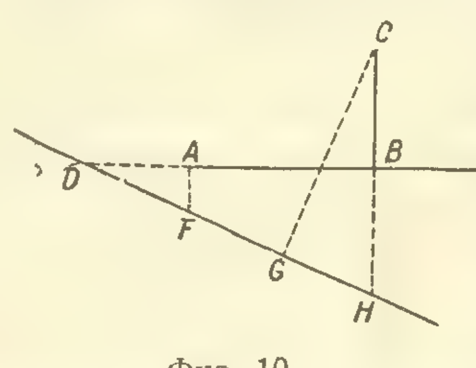
IX

Первые формулы для замены координат

Из „Francisci à Schooten in Geometriam Renati Des Cartes Commentarii“, содержащихся в „Geometria à Renato Des Cartes etc.“, ed. Schooten, Лейден 1649 (см. № VIII).

Стр. 191 (изд. 1659, стр. 176 и след.) ...Отсюда ясно, что хотя очень важно, какие прямые [1] выбирают для неопределенных величин, дабы получить краткое и легкое уравнение, но линия всегда (192) оказывается относящейся к одному и тому же роду (generis), каким бы образом их (переменные) ни взять.

Я оставлю без рассмотрения другие виды или формулы уравнений, обозначающих одни и те же кривые, хотя их имеется несколько. По этому поводу я замечу, что все многообразие таких уравнений вытекает только из различного отношения этих кривых к различным прямым линиям. Чтобы показать, какая получается разница, если относить какую-нибудь кривую линию к различным прямым, положим, что имеются две заданных по положению прямых линии AB, DF, пересекающихся в D (фиг. 10); пусть C будет точкой на кривой. Возьмем на AB точку A и опустим из точки C на AB перпендикуляр CB, чтобы отнести точку C к некоторой точке прямой AB. Я назову AB — x, а BC — y. Далее, так как заданы по положению AB, DF и, значит, дана также и их точка пересечения D, то мы имеем и прямую DA и также AF, перпендикулярную к AB и пересекающую DH в F. Наконец, опустим из C перпендикуляр CG на DH и продолжим CB до пересечения с прямой DF в точке H. Допустив все это, положим, для того чтобы найти прямые DG, GC, выражающие отношение точки C к точке G, $DA \propto a$, $AF \propto b$. Отсюда следует, что, так как AB есть [2] $\propto x$, то $DB \propto a + x$. Так как,



Фиг. 10.

[1] Путаницу вносит то обстоятельство, что здесь (как и раньше, начиная с древности) не проводится различия между „прямой“ и „отрезком“. Технический термин „отрезок“ вошел во всеобщее употребление лишь благодаря работам Я. Штейнера (Steiner) с 1833 г.

[2] В оригинале так и стоит: „cum AB sit $\propto x$“.

ввиду подобия треугольников DAF, DBH, DA относится к AF, т. е. a к b, как DB, т. е. $a+x$, к BH, то $BH \propto \propto \frac{ab+bx}{a}$. Если прибавить к этому $CB \propto y$, то все $CH \propto \propto y+b+\frac{bx}{a}$. Далее, так как треугольник DAF прямоугольный, то квадрат DF равен квадратам [1] DA и AF; поэтому (193) $DF \propto \sqrt{a^2+b^2}$. Следовательно, так как DA относится к AF, т. е. a к $\sqrt{a^2+b^2}$, как DB, т. е. $a+x$, к DH, то последнее

$$\propto \frac{a+x}{a}\sqrt{a^4+b^2}\text{, или } \sqrt{a^2+b^2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Соответственным образом так как, ввиду подобия треугольников FAD, HGC, DF, т. е. $\sqrt{a^2+b^2}$, относится к FA, т. е. к b, как CH, т. е. $y+b+\frac{bx}{a}$, относится к HG, то имеем:

$$HG \propto \frac{aby+ab^2+b^2x}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если вычесть это из $DH \propto \sqrt{a^2+b^2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2}$, то остается $DG \propto \frac{a^3+a^2x-aby}{a\sqrt{a^2+b^2}}$, или $\frac{a^2+ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Наконец, так как DF относится к DA, т. е. $\sqrt{a^2+b^2}$ относится к a, как CH, т. е. $y+b+\frac{bx}{a}$ относится к CG, то имеем:

$$CG \propto \frac{ab+bx+ay^2}{\sqrt{a^2+b}}.$$

Отсюда видно, что вся разница, получающаяся от того, что точки C кривой один раз относят к точкам прямой AB,

---

[1] Так была формулирована уже по-гречески у Эвклида (1, 47) пифагорова теорема. Мы выражаемся правильнее, говоря „равен сумме квадратов".

[2] В тексте здесь несколько раз встречаются отдельные строки для формул, ибо в противном случае представились бы трудности для типографского набора. Читатель, вероятно, смог заметить, что текст оригинала сплошной, без абзацев, насколько это только возможно.

а другой раз — к точкам прямой DF, заключается лишь в том, что, если принять за неопределенную AB, то CB выражается через y, но CG через

$$\frac{ab+bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } DG \text{ через } \frac{a^2+ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так что, если y дано в виде, подобающем ему согласно свойствам кривой, то существует одновременно отношение, которое точки C кривой имеют к точкам как прямой AB, так и прямой DF. Это можно было бы показать таким же образом и для всяких других заданных по положению (прямых) линий, если бы мы не стремились быть, по возможности, краткими.

Пояснительные замечания. Вышеприведенное представляет дальнейшее развитие мысли, высказанной Декартом (см. выше № VI), именно, что (выражаясь по-современному) от замены осей координат другими осями не изменяется „genre" кривой, причем Декарт имел в виду, собственно, не степень или размерность, а ошибочно объединял в один genre кривые двух следующих друг за другом степеней. Дополнения к этому Скаутена очень интересны, но все же не полны. Он рассматривает не только применявшееся уже Ферма и Декартом параллельное перенесение координат, но вводит совершенно новую систему осей, повернутую относительно прежней системы на некоторый угол, причем только выбор новой начальной точки не вполне произволен. Но это повлекло бы за собой только незначительное изменение. Скаутен выражает новые координаты, которые мы назовем ξ и η ($CG=\eta$, $DG=\xi$) через старые координаты x, y. В настоящее время мы получаем для уравнения DF в прежней системе сейчас же $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+1=0$. Тогда легко получается:

$$\eta=\frac{bx+ay+ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Далее, для уравнения CG в прежней системе (текущие координаты X, Y) имеем:

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{a}{b}, \text{ или}$$

$$-aX+bY+(ax-by)=0,$$

а отсюда, опять-таки, перпендикуляр DG из точки $D(-a, 0)$:

$$\xi = \frac{ax - by + a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (2)$$

У Скаутена имеются формулы (1) и (2). Но так как у него уравнение кривой написано в координатах x, y, то, собственно, он должен был бы обратить эти формулы, чтобы получить уравнение кривой относительно новой системы. Вряд ли он имел это, действительно, в виду, и я уже выше высказал сомнение, давал ли себе сам Декарт ясно отчет в значении своей фразы, что фактически „степень" уравнения не изменяется от такого „линейного" преобразования координат.

Обращенные формулы для x и y гласили бы:

$$x = \frac{a\xi + b\eta}{\sqrt{a^2 + b^2}} - a, \qquad (3)$$

$$y = \frac{-b\xi + a\eta}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (4)$$

Формулы эти ясно указывают на наличие вращения и параллельного перенесения (последнего на $-a$, 0). По сравнению с нашим методом любопытно отметить, что не вводится (острый) угол δ при D (хотя к этому времени тригонометрия давно уже была достаточно развита; ср. II выпуск). Формулы (3) и (4) гласили бы в этом случае:

$$x = \xi \cos\delta + \eta \sin\delta - a, \qquad (3^*)$$

$$y = -\xi \sin\delta + \eta \cos\delta. \qquad (4^*)$$

Это — употребляемая нами теперь форма преобразования, которую с помощью угла δ мы выводим, разумеется, иначе.

X

Первое уравнение поверхности в пространственных координатах

Из Nouveaux Elemens des Sections coniques, les Lieux geometriques, la Construction, ou Effection des Equations, par M. de La Hire de l'Academie Royale des Sciences. A Paris... M DC LXXIX.

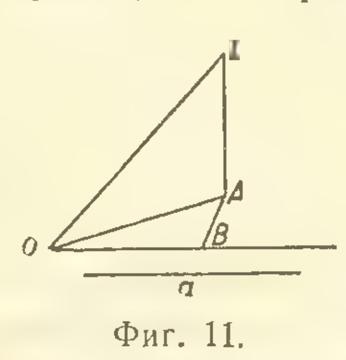
Стр. 209. Четвертый пример неопределенной проблемы.

Пусть дана в некоторой плоскости прямая линия OB неопределенной длины по направлению к B, и точка O на этой

линии (фиг. 11). Требуется отыскать вне этой плоскости точку L такую, что если провести LB перпендикулярно к OB, то часть OB вместе с некоторой заданной прямой линией (отрезком) a равнялась бы OL.

(210). Прежде всего я обращаю внимание на то, что для определения точки, лежащей вне некоторой плоскости, по отношению к заданной в этой плоскости прямой линии, необходимы три условия: 1) величина перпендикуляра LA из точки L на плоскость, 2) перпендикуляр AB из точки A на данную линию OB и 3) часть OB этой линии между точкой O и точкой B. Поэтому, я положу $OB \propto x$, $AB \propto y$, $LA \propto v$, что представляет три неизвестных, а известной будет a.

(211). Так как углы LAB, ABO и, значит, также LBO прямые, то OL равно корню из трех квадратов LA, AB и BO вместе; но OL должно равняться OB плюс a. Поэтому, в аналитических выражениях имеет уравнение: $a + x \propto \sqrt{xx + yy + vv}$, а если, желая уничтожить знак корня, мы умножим каждую сторону (partie) уравнения на самое себя, то мы получим $aa + 2ax + xx \propto xx + yy + vv$, что сведется к $aa + 2ax \propto yy + vv$; и так как нет никаких средств найти другие уравнения для удаления каких-либо неизвестных, то отсюда следует, что проблема неопределенна.



Фиг. 11.

Легко заметить, что в первых трех примерах неопределенных проблем недоставало только одного условия, чтобы сделать их определенными, в четвертом же примере их нехватает двух.

....

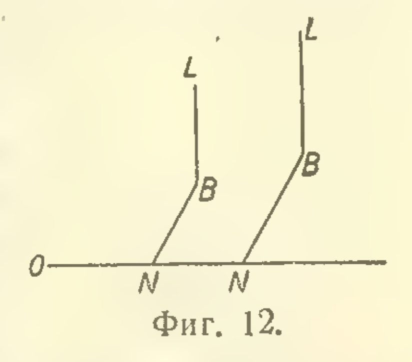
(213). Геометрическим местом называют каждую прямую или кривую линию или поверхность и т. д., все точки которых имеют одно и то же отношение к точкам одной и той же прямой линии относительно одной из ее точек.

... (В качестве примера геометрического места на плоскости приводится прямая.)

(215). Точно так же, чтобы узнать отношение точек LL некоторой поверхности к точкам некоторой прямой линии ON (фиг. 12), надо провести через линию ON плоскость ONB и из каждой точки L поверхности провести линии LB параллельно друг к другу до плоскости и линии BN также параллельно друг другу до ON. Но я не намерен говорить здесь об этого рода геометрических местах.

Пояснительные замечания. Ла-Гир (La Hire) написал небольшую, легко доступную книжку. Как видно уже из заглавия ее, она состоит из трех частей: первая из них содержит элементарное учение о конических сечениях, между тем как во второй и третьей употребляются координаты совершенно в духе Декарта. Третья часть содержит то, что мы назвали бы „графическим решением уравнений" с помощью геометрических мест, разъясненных во второй части.

Вышеприведенное представляет все, что ла-Гир дает относительно пространственных геометрических мест; но оно достаточно интересно, ибо здесь впервые, вообще, дана формула подобного места. Декарт только в конце второй книги своей „Геометрии" указал вкратце на возможность аналитического рассмотрения пространственных кривых с помощью двух проекций, а у Ферма́ в одной из его позднейших алгебраических работ имеется намек на то, что он имел в виду такое же распространение координат на пространство, что и ла-Гир. Лагировское обобщение сделано совершенно в духе данного Ферма́ и Декартом определения координат. Остальное так просто, что вряд ли нуждается в каких-нибудь разъяснениях. Ла-Гир не исследует, какую поверхность представляет построенное им геометрическое место. Сумел ли бы он это сделать? Во всяком случае для нас этот вопрос не представляет никаких затруднений. Действительно, если положить $y^2 + v^2 = z^2$, то мы получаем уравнение параболы:



Фиг. 12.

$$z^2 = 2ax + a^2,$$

вращение которой вокруг оси x (т. е. прямой AB) дает искомую поверхность параболоида вращения.

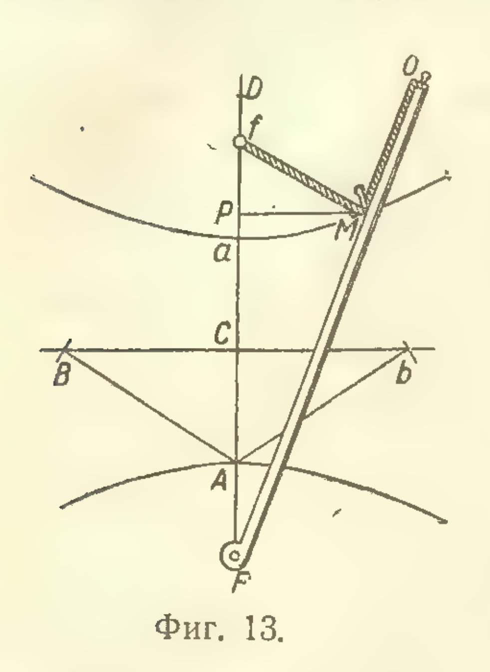
Я сомневаюсь, чтобы ла-Гир связывал что-нибудь реальное со словами „и т. д.", находящимися на стр. 213 его книжки после слова „поверхность". Ведь в этом случае ему пришлось бы иметь в виду геометрическое место трех измерений, которое, следовательно, должно было бы лежать в пространстве четырех измерений.

XI

Установление уравнения гиперболы

Из Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminez qu'indeterminez. Ouvrage posthume de M. Le Marquis de l'Hospital,... A Paris... M. DCCVII.

Предварительные замечания. Чтобы не слишком перегрузить нижеследующий текст, я, несмотря на весь исторический интерес оригинала, передам введение к приводимому мною отрывку в современном виде. Изложение Лопиталя (L'Hospital) усложнено потому, что он все еще считает небходимым брать вторую точку M на „противолежащей гиперболе" (дословно, по Аполлонию) и рассматривать одновременно и ее, и потому, кроме того, что он различает всегда случаи, когда P лежит между фокусами F и f или вне них (фиг. 13). Тогда еще не была осознана общезначимость „формулы", это важнейшее достиженне „аналитического" метода.



Фиг. 13.

Лопиталь полагает на рисунке (упрощенном по сравнению с оригиналом, но с сохранением всех обозначений его) $FM - fM = Aa = 2t$[1]; иначе говоря, $CA = Ca = t$, далее, $CP = x$, $PM = y$, $CF = Cf = m$. Кроме того, наносят $AD = MF$, благодаря чему $aD = Mf$, и CD полагают равным z. Благодаря этому $AD = MF = z + t$, $aD = Mf = z - t$. Так как далее $Pf = m - x$, $PF = m + x$, то в обоих треугольниках PMf и PMF имеет:

$$(z-t)^2 = y^2 + (m-x)^2,$$
$$(z+t)^2 = y^2 + (m+x)^2,$$

откуда, путем вычитания, получаем: $2zt = 2mx$ и $z = \frac{mx}{t}$.

Кроме того, на рисунке наносят еще $AB = Ab = m$, так что $CB = Cb = \sqrt{m^2 - t^2} = c$. Под „первой осью" Лопиталь понимает то, что мы называем „действительной осью", „вторая ось" соответствует нашей „мнимой оси".

---

[1] Из рисунка видно, как на основании этого свойства получается гипербола. Вокруг F вращается линейка, в f и O прикреплен шнурок, прижимаемый в M штифтом к линейке. Насколько уменьшается при движении длина шнурка OM настолько увеличивается длина линейки FM, так что разность $FM - fM$ остается при движении линейки постоянной ($= Aa$).

79. Квадрат какой-нибудь ординаты PM по отношению к первой оси Aa относится к прямоугольнику на AP и Pa, отрезках этой продолженной оси, как квадрат ее сопряженной (оси) Bb относится к квадрату первой оси Aa.

Требуется доказать, что $\overline{PM}^2 . AP \times Pa : : \overline{Bb}^2 \cdot \overline{Aa}^2$.

Пусть даны те же вещи, что и в предшествующем положении, тогда, если в полученном из прямоугольного треугольника MPF уравнения $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ положить вместо z его значение $\frac{mx}{t}$, имеем всегда уравнение $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, которое, приведенное к пропорции, дает $\overline{PM}^2(yy). AP \times Pa(xx - tt) : : (53) \overline{BC}^2(mm - tt). \overline{CA}^2(tt) : : \overline{Bb}^2. \overline{Aa}^2$. Что и требовалось доказать.

Дополнение I

....

Основоположное дополнение II

81. Если обозначить через $2t$ первую или вторую ось Aa, а сопряженную с ней Bb через $2c$, ее (относящийся к оси Aa) параметр через p, каждую из ее ординат PM через y и каждую из ее частей CP между центром и основаниями ординат через x, то всегда имеют $\overline{PM}^2(yy). \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2(xx \mp tt) : : \overline{Bb}^2(4cc). \overline{Aa}^2(4tt) : : p. Aa(2t)$ Действительно, по определению параметра $Aa(2t) \cdot Bb(2c) : : Bb(2c). p = \frac{4cc}{2t}$. При этом надо иметь в виду, что знак — следует взять, если ось Aa первая и что тогда вместо $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$ можно взять прямоугольник $AP \times Pa$, равный ему (этому выражению). Наоборот, следует взять знак $+$, если ось Aa вторая. Если перемножить сперва крайние и средние (внутренние) (члены) первой пропорции $yy . xx \mp tt : : 4cc . 4tt$, затем члены другой пропорции $yy . xx \mp tt : : p \cdot 2t$, то получится $yy = \frac{xxcc}{tt} \mp cc$ и $yy = \frac{pxx}{2t} \pm \frac{1}{2} pt$. Так как свойство это присуще всем точкам противолежащих гипербол и так как (54) оно определяет их положения относительно осей, то отсюда следует, что уравнение $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$ или $yy = \frac{pxx}{2t} \pm \frac{1}{2} pt$ вполне выражает их природу по отношению к осям.

Пояснительные замечания. Книга Лопиталя — это толстый том in quarto с 285 рисунками на 32 гравюрах на меди, прекрасный труд для тогдашнего времени. Разумеется, аналитическим методам Лопиталь научился у Декарта, но интересно, что в алгебраическом способе обозначения он еще более Декарта примыкает к англичанам. Уже употребление строчных букв, вообще, имеет своим автором Г. Гарриота (Harriot) („Artis analyticae praxis", Лондон 1631) Гарриот усвоил также знак равенства своего земляка Р. Рекорда (Recorde, 1557), которого Декарт не принял. Лопиталь снова начинает пользоваться им. Далее, Лопиталь пишет пропорцию $a:b=c:d$ (так, впервые, — лишь у Лейбница, 1693) в виде $a.b::c.\,d$ (где точки являются просто лишь точками разделения), согласно вышедшему во многих изданиях так называемому „Clavis mathematicae" („Математический ключ", 1 изд., Лондон 1631) В Оугреда (Oughtred). Декарт старался заменить пропорции (греков) равенствами, что, правда, не всегда еще удавалось ему. Лопиталь же снова придает изящным равенствам форму пропорций, находя это, очевидно, более удобным для себя и для своих читателей.

В остальном изложенная выше задача не представляет никаких трудностей, если только положить в соответствии с нашим употреблением $t=a$, $c=b$, $m=e(m^2=c^2+t^2)$. Положение II утверждает для гиперболы то, с чем мы познакомились уже для случая эллипса у Архимеда, именно, что (пользуясь нашим обозначением)

$$\frac{y^2}{(x+a)(x-a)}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{2a},$$

если принять по-старинному p равным $\frac{2b^2}{a}$. Этим уже дано собственно уравнение гиперболы.

Но дальнейшие рассуждения Лопиталя в дополнении II перегружены еще тем, что он принимает за ось x-ов одновременно и так называемую мнимую ось. Мы бы дали это в виде дополнения и сказали бы, что если уравнение имеет вид:

$$y^2=\frac{c^2x^2}{t^2}-c^2,$$

откуда тотчас же получается привычная нам форма

$$\frac{x^2}{t^2}-\frac{y^2}{c^2}=1,$$

то, после обмена местами осей и одновременно t и c, оно будет гласить:

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{t^2} = 1,$$

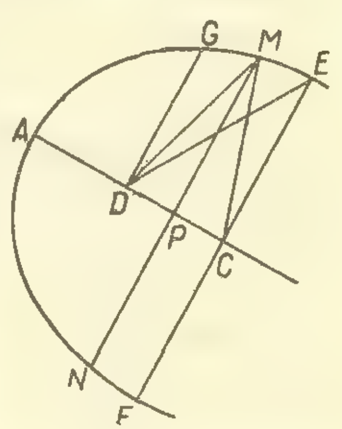
или же

$$\frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{c^2} = -1.$$

XII

Фокусы эллипса

Из «Introductio in analysin infinitorum». Auctore Leonhardo Eulero..., Lausannae..., MDCCXLVIII. Tomus secundus.



Фиг. 14.

Предварительные замечания. Эйлерово „Introductio" (см. вып. II, № XXI) содержит только две небольших главы о конических сечениях вообще, и о их классификации, которые, однако, как и все в этом замечательном труде, представляют значительный прогресс по сравнению с работами предшественников Эйлера. В § 125 (т. II, стр. 61—62) Эйлер занимается решением задачи, как, зная произвольную пару сопряженных диаметров, найти сопряженные взаимно перпендикулярные диаметры. К этому примыкает нижеследующее.

Стр. 62.

126. Итак, пусть CA & CE будут оба сопряженных перпендикулярных друг к другу полудиаметра конического сечения (фиг. 14), которые обыкновенно называют главными диаметрами, и пусть они пересекаются под прямым углом в центре C. Пусть абсцисса $CP = x$, ордината (applicata) $PM = y$, тогда, как мы видели, $yy = \alpha - \beta xx$, и если полудиаметры обозначить $AC = a$, $CE = b$, то $\alpha = bb$ & $\beta = \frac{bb}{aa}$, откуда

$yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. Так как это уравнение не изменяется, возьмут ли x & y положительными (affirmativae) или отрицательными, то из него следует, что кривая имеет четыре подобных и равных части, расположенных по обеим сторонам диаметров

AC & EF. Действительно, квадрант ACE подобен и равен квадранту ACF и два равных им квадранта лежат по другую сторону диаметра EF.

127. Если из центра C, который мы примем за начало (pro initio) абсцисс, проведем прямую CM, то она будет

$$= \sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{\left(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx\right)}.$$

Отсюда следует, что если возьмем $b = a$ или $CE = CA$, то $CM = \sqrt{bb} = b = a$. Значит в этом случае все прямые, проведенные из центра C к кривой, равны между собой (63). Так как свойство это принадлежит кругу, то отсюда следует, что коническое сечение, у которого два сопряженных главных диаметра равны между собой, есть круг. Таким образом, если положить $CP = x$ & $PM = y$, то уравнение его в прямоугольных координатах (inter Coordinatas orthogonales) гласит $yy = aa - xx$, где $CA = a$ есть радиус круга.

128. Но если не имеет места $b = a$, то прямая CM никогда не сможет быть выражена рациональным образом через x. Однако существует другая точка D на оси, по отношению к которой все проведенные до кривой прямые DM могут быть выражены рационально. Чтобы найти эту (точку), положим $CD = f$, тогда, так как $DP = f - x$, $DM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)\,xx}{aa}$. Это выражение становится квадратом, если $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$, или $0 = aa - bb - ff$, откуда $f = \pm\sqrt{(aa - bb)}$. Таким образом на оси AC имеются две таких точки по обе стороны центра, на расстоянии $CD = \sqrt{(aa - bb)}$.

Но тогда: $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa - bb)} + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, и, отсюда, $DM = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a} = AC - \frac{CD \cdot CP}{AC}$. Для $CP = 0$ $DM = DE = a = AC$[1], но если принять абсциссу $CP = CD$ или $x = \sqrt{(aa - bb)}$, то прямая DM переходит в ординату DG и, таким образом, $DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, или DG становится третьей пропорциональной к AC & CE.

[1] У Эйлера кривая, очевидно, по ошибке гравера, представляет окружность, так что указанные отношения длин не согласуются между собой. Я исправил рисунок.

Пояснительные замечания. К заголовку (фокусы) относится собственно только § 128. Но § 127 служит естественным введением к этому, а § 126 я прибавил еще для того, чтобы показать, насколько подвинулся вперед по сравнению с своими предшественниками Эйлер, хотя он все еще говорит о „начальной точке абсцисс“: из наличия квадратов x и y он умозаключает о двойной симметрии, т. е. осмеливается принимать отрицательными как x, так и y. До Эйлера это сделал впервые Ньютон в своих исследованиях о кривых третьего порядка (опубликованы в 1704 г.). Прежде чем заняться § 128, я хочу еще указать, что в § 129 введены названия — для фокусов „Foci“ или „Umbilici“ (собственно пуповинные точки), затем, уже известные нам в большинстве названия „Axis transversus“ для a и ее „Axis conjugatus“ для b, и название „полупараметр“ (Semiparameter) для DG, так как сам параметр есть двойная DG (называемая „Ordinata“) и он имеет еще название „latus rectum“.

В § 128 Эйлер разыскивает на оси AC такие точки D, что DM становится рациональным. Это — фокусы. Он находит выражение

$$b^2+f^2-2fx+\frac{(a^2-b^2)\,x^2}{a^2},$$

которое должно быть квадратом. Эйлер рассматривает его как квадрат

$$\sqrt{b^2+f^2}-\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}.$$

Если взять удвоенное произведение этих членов и приравнять его $-2fx$, то получается эйлерово условие, из которого следует, что $f=\pm\sqrt{a^2-b^2}$. Мысль о введении фокусов не так неожиданна, как это может показаться на первый взгляд. Правда, я не знаю ни одного математического труда, который мог бы дать размышлениям Эйлера толчок в этом направлении, но, очевидно, он знал из астрономии, где уже Кеплер (еще в 1609 г.) использовал полярные уравнения эллипса, хотя и не под этим названием и не в современной форме, что „радиус-вектор“ эллипса по отношению к фокусу можно выразить рациональным образом через x.

Положим $DM=\rho$, а $\sphericalangle MDC=\omega$ возьмём в качестве полярного угла, тогда мы имеем, по Эйлеру, прежде всего, $\rho=a-\frac{fx}{a}$.

Так как $f - x = \rho \cos \omega$, то положив еще, согласно нашему обычаю, $f = e$ и $\frac{e}{a} = \varepsilon$ (эксцентриситет) — легко получить:

$$a\rho = a^2 - e^2 + e\rho \cos \omega ,$$

и

$$\rho = \frac{b^2}{a - e \cos \omega} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \omega} ,$$

обычное уравнение эллипса в полярных координатах, где p на этот раз положено на современный манер равным „полупараметру"

$$DG = \frac{b^2}{a} .$$

Отметим еще, что Эйлер, вместо употреблявшегося Декартом знака радикала, снова пользуется малопрактичными скобками. В других отношениях алгебраическая символика Эйлера почти не отличается от современной.

XIII

Парабола как предельный случай эллипса

Из L. Euler „Introductio" (см. № XII), т. II, Лозанна 1748.

Стр. 72.

147. Если отсчитывать абсциссы от вершины A и если положить $AP = x$, $PM = y$ (фиг. 15), причем $a - x$ теперь есть то, что раньше было x, то получают следующее уравнение:

$yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx) = \frac{2bb}{a} x - \frac{bb}{aa} xx$, где, очевидно, $\frac{2bb}{a}$ есть параметр или „latus rectum" (см. № III) эллипса. Положим половину latus rectum или ординату в фокусе $= c$, & расстояние фокуса от вершины $AF = d$, в таком случае:

$$\frac{bb}{a} = c \;\&\; a - \sqrt{(aa - bb)} = d = a - \sqrt{(aa - ac)} \cdot$$

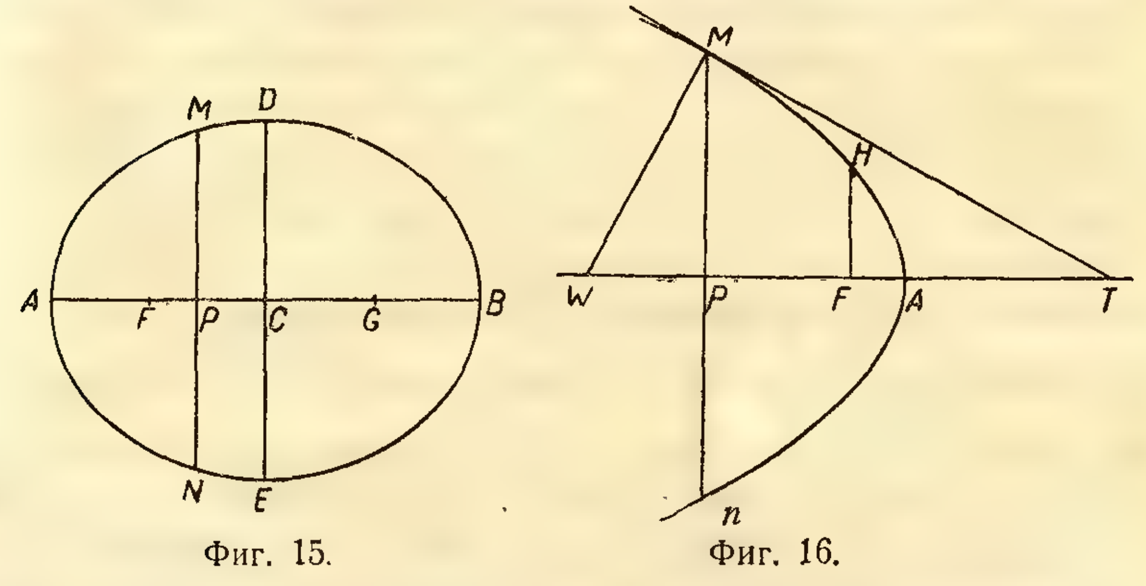
Отсюда получают: $2ad - dd = ac \;\&\; a = \frac{dd}{2d - c}$,

следовательно, $yy = 2cx - \frac{c(2d - c)xx}{dd}$.

Это (73) уравнение эллипса между прямоугольными координатами x и y, причем абсциссы отсчитываются на полуоси AB

от вершины A. Это уравнение зависит от данного расстояния фокуса от вершины $AF=d$ & от половины latus rectum; при этом следует иметь в виду, что $2d$ должно всегда быть больше, чем c, ибо $AC=a=\frac{dd}{2d-c}$ & $CD=b=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$.

148. Если $2d=c$, то $yy=2cx$, это — уравнение, полученное нами выше для параболы; действительно, вышеприведенное уравнение $yy=\alpha+\beta x$ приводится к этой форме, если начало абсцисс перенести на отрезок (intervallo) $=\frac{\alpha}{\beta}$. Пусть, следовательно, MAN будет парабола (фиг. 16), природа которой выражается уравнением $yy=2cx$ между абсциссой $AP=x$ &



Фиг. 15. Фиг. 16.

ординатой $PM=y$. В соответствии с этим расстояние фокуса от вершины $AF=d=\frac{1}{2}c$, & полупараметр $FH=c$ и повсюду $PM^2=2FH\cdot AP$. Отсюда следует, что если взять абсциссу AP бесконечно большой, то одновременно с этим вырастают до бесконечности ординаты PM & PN. Поэтому кривая простирается по обе стороны оси AP до бесконечности. Если же взять абсциссу x отрицательной, то ордината становится мнимой; поэтому, оси вне A по направлению к T не соответствует никакая часть кривой.

149. Так как уравнение эллипса переходит в уравнение параболы, если принять $2d=c$, то ясно, что парабола не что иное, как эллипс, полуось которого $a=\frac{dd}{2d-c}$ бесконечна. Поэтому все свойства, найденные нами для эллипса, можно перенести на параболу, если дать оси a стать бесконечной.

И, прежде всего, так как $AF = \frac{1}{2}c$, то $FP = x - \frac{1}{2}c$, и если затем провести из фокуса F прямую FM к точке M кривой, имеем $FM^2 = xx - cx + \frac{1}{4}cc + yy = xx + cx + \frac{1}{4}cc$, и, поэтому, $FM = x + \left(74\right)\frac{1}{2}c = AP + AF$, что является главным свойством фокуса параболы.

Пояснительные замечания. Я обрываю здесь рассуждения Эйлера, ибо я хотел дать только образчик его метода. Вопрос сам по себе настолько прост, что не нуждается ни в каких разъяснениях. Но в то время такой подход к делу был нов. Прежде лишь в самых редких случаях параболу рассматривали как переходную ступень между эллипсом и гиперболой. И во всяком случае, никем еще до того не было дано аналитическое изложение этой точки зрения. Упоминаемое в самом конце главы свойство фокуса параболы состоит в том, что каждая точка M параболы находится на таком же расстоянии от F, как и от некоторой перпендикулярной к оси, расположенной вправо от A на расстоянии $\frac{1}{2}c \left(= FA\right)$, прямой (директрисы). Это свойство не упоминается у Аполлония, но было, наверное, уже давно известно в древности, хотя впервые о нем сообщает лишь Папп (III в. н. э). В следующем параграфе Эйлер показывает еще, что $AT = AP = x$, так что, в конце концов, $FM = FT = FW$. Отсюда следует и общепринятое свойство отраженного в M луча FM.

XIV

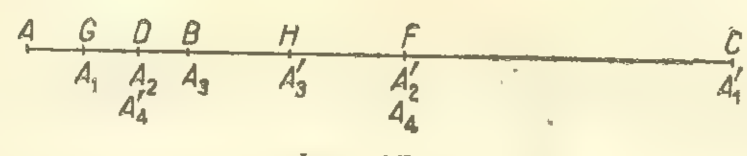
Инволюция

Из Girard Desargues, Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639. Перепечатано в Ceuvres de Desargues, réunies et analysées par M. Poudra. Paris, 1864. Tome I. Нем. перевод Цахариаса (Zacharias) „Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene“ (Ostwalds Klass, № 197), Лейпциг 1922.

Предварительные замечания. Дезарг (Desargues), друг Декарта, уже при жизни подвергался жестоким нападкам за непонятность своих трудов. Трудность понять их зависела не только от совершенной новизны содержания их для современников, но и от формы изложения. Масса новых специальных

терминов уже заранее сбивала с толку читателя. В результате все труды Дезарга были совершенно забыты, а большинство из них вообще пропало. Так, например, от „Brouillon proiect" не сохранилось ни одного печатного экземпляра. Только благодаря счастливой случайности мы, вообще, знакомы с его содержанием. В 1845 г. французский математик и историк математики, М. Шаль (Chasles) открыл у одного парижского букиниста копию „Brouillon proiect", сделанную для себя в 1679 г. ла Гиром (см. выше № X). Уже на основании первого издания этого труда (в 1864 г.) можно было убедиться, что Дезарг владел уже, хотя и в несколько архаической форме, всей проективной геометрией, вновь созданной, между тем, за это время, главным образом, трудами В. Понсле (Poncelet, 1822; см ниже № XVI).

В нижеследующем „дерево" означает прямую с ее парами точек, у которых прямоугольники на соответствующих отрезках предполагаются равными, так что $AG \cdot AC = AD \cdot AF = AB \cdot AH$.



Фиг. 17а.

Точка A, от которой отсчитываются отрезки, называется „стволом" (souche). Сами отсчитываемые от A отрезки называются „ветвями" (branches), их конечные точки B, C, D... „узлами" (noeuds). Отрезки между этими точками (за исключением A), например BD, — называются „побегами" (brins). Ствол A называется „связанным" (engagé) или „свободным" (dégagé) по отношению к какой-нибудь паре точек, если в первом случае он лежит между обеими точками или, во втором, — вне их. Другие выражения, как, например, „близнецы" (gémeaux) нетрудно понять из самого текста.

Нижеследующее изложение и по форме совершенно тесно примыкает к Дезаргу.

Стр. 116 (нем. стр. 16/17). Если у дерева AH ствол A свободен по отношению к обеим ветвям каждой из пар AC, AG; AF, AD; AB, AH (фиг. 17 а), то тот же ствол, очевидно, свободен и по отношению к обоим узлам каждой из пар; C,G; D,F; B, H; и оба узла каждой из пар: C,G; D,F; B,H, очевидно, тоже отделены (desmelez) от обоих узлов любой другой пары.

И, наоборот, если у какого-нибудь дерева оба узла любой пары C, G отделены от обоих узлов любой другой пары D, F, то и ствол A свободен по отношению к обоим узлам и обеим ветвям каждой (117) из пар. Отсюда, очевидно, следует, что если у какого-нибудь дерева HB дан вид какого-нибудь одного из всех этих положений ствола, ветвей и узлов друг относительно друга, то этим самым дан и вид всех других положений прочих из этих самых вещей.

И, вообще, при каждом из этих обоих видов образования дерева (имеет место следующее).

Как какая-нибудь из ветвей AG относится к соответствующей ей AC, так относится прямоугольник на любой паре побегов GD, GF, которые носит на себе эта произвольная ветвь AG, к своему соответствующему прямоугольнику CD, CF.

Действительно, ввиду равенства прямоугольников на обеих ветвях каждой из трех пар: AB, AH; AC, AG; AD, AF четыре ветви AG, AF, AD, AC попарно пропорциональны. Отсюда следует, что

как AG относится к AF или же AD к AC } так относится GD к CF

и что

как AF относится к AC или же AG к AD } так относится GF к CD.

Следовательно, ветвь AG находится в таком же отношении к сопринадлежной с ней ветви AC, как соединение (произведений) (118) отношений побега GD к побегу CF и побега GF к побегу CD, что равно отношению прямоугольника на побегах пары GD, GF к прямоугольнику на побегах соответствующей пары CD, CF.

Отсюда следует, что прямоугольник на побегах GB, GH — близнец прямоугольника GD, FG — так относится к своему соответствующему, прямоугольнику CB,CH, близнецу прямоугольника CD, CF, как прямоугольник GD,GF — близнец прямоугольника GB, GH — относится к своему соответствующему, прямоугольнику CD, CF — близнецу прямоугольника CB, CH.

Ибо, по доказанному, прямоугольник на побегах пары GB, GH, относится к своему соответствующему, прямоугольнику CB, CH, как ветвь AG к сопринадлежной с ней AC.

Кроме того, было также доказано, что прямоугольник на побегах GD, GF относится к своему соответствующему, прямо-

угольнику CD, CF, как та же самая ветвь AG к сопринадлежной с ней AC.

Следовательно, прямоугольник на побегах GB, GH — близнец прямоугольника GD, GF — относится к своему соответствующему, прямоугольнику CB, CH, как прямоугольник GD, GF к своему соответствующему, прямоугольнику CD, CF.

Отсюда следует, что и прямоугольник на побегах FC, FG относится к своему соответствующему, прямоугольнику DC, DG, как прямоугольник на побегах FB, FH к своему соответствующему, прямоугольнику (119) на побегах DB, DH. Действительно, это отношение равно отношению ветви AF к сопринадлежной с ней AD.

Отсюда следует, далее, что прямоугольник на побегах HC, HG относится к своему соответствующему, прямоугольнику BC, BG, как прямоугольник на побегах HD, HF к своему

Фиг. 17б.

соответствующему, прямоугольнику BD, BF. Действительно, это отношение равно отношению ветви AH к сопринадлежной с ней AB.

Инволюция. И таким образом, если на прямой AH даны три пары точек $B, H, C, G; D, F$ такого свойства, что обе точки в каждой паре одновременно либо смешаны (фиг. 17б), либо обособлены по отношению к обеим точкам каждой другой пары и если соответствующие друг другу прямоугольники из отрезков (pieces) между этими точками относятся друг к другу так как их близнецы, если их взять в том же самом порядке, то такое расположение трех пар точек на прямой мы называем „инволюцией“ [1].

Пояснительные замечания. Мы должны, прежде всего, поступить так, как поступил Цахариас в своем немецком переводе Дезарга, именно, перевести утверждение последнего на язык нашей символики. Из равенства прямоугольников следует, например, что

$$AG:AF = AD:AC, \qquad (1)$$

а отсюда

$$(AD - AG):(AC - AF) = GD:CF = AG:AF = AD:AC, \qquad (2)$$

[1] Выражение „инволюция“, как и другие термины, тоже ботанического характера. Оно означает скрученное состояние молодых листьев.

4*

причем здесь применяется известное математикам уже с древности сложение (или вычитание) соответствующих членов пропорции, и

$$(AF - AG):(AC - AD) = GF:CD = AF:AC = AG:AD. \quad (3)$$

Теперь, путем умножения обоих отношений $AG:AF$ и $AF:AC$, Дезарг получает:

$$AG:AC = \frac{GD}{CF} \cdot \frac{GF}{CD} = GD \cdot GF : CF \cdot CD. \quad (4)$$

Применяя к паре точек B, H те же рассуждения, что и к точкам D, F, можно получить также

$$GB \cdot GH : CB \cdot CH = GD \cdot GF : CD \cdot CF. \quad (5)$$

Другие два уравнения, даваемые еще Дезаргом, получаются путем замены пар узлов.

На этой основе Дезарг возводит теорию конических сечений, в частности, всю теорию поляр. Полученным Дезаргом результатам мы постараемся придать более современный вид. Уравнение (5) можно, несколько видоизменив его, написать так:

$$\frac{GD}{CD} : \frac{GB}{CB} = \frac{GH}{CH} : \frac{GF}{CF} \left[= \frac{CF}{GF} : \frac{CH}{GH} \right].$$

Только в этой форме становится нам понятной теорема Дезарга. Действительно, теперь на левой стороне мы имеем „двойное отношение“ [введенное Брианшоном (Brianchon) в 1817 г., см. ниже № XVI] четырех точек G, D, B, C, а на правой стороне — двойное отношение четырех точек G, H, F, C, или C, F, H, G. Совершенно аналогичным образом можно выразить два последних уравнения Дезарга, принимающие, если пользоваться современными сокращениями, следующий вид:

$$(F, D, G, B) \;\overline{\wedge}\; (D, F, C, H),$$

т. е.

$$\frac{FG}{GD} : \frac{FB}{BD} = \frac{DC}{CF} : \frac{DH}{HF},$$

и

$$(H, B, G, D,) \;\overline{\wedge}\; (B, H, C, F),$$

т. е

$$\frac{HG}{GB} : \frac{HD}{DB} = \frac{BC}{CH} : \frac{BF}{FH}.$$

Но, представленные в таком виде, эти равенства еще недостаточно прозрачны. Введем сперва другие обозначения и положим A_1 вместо G, A'_1 вместо C, A_2 вместо D, A'_2 вместо F, A_3 вместо B, A'_3 вместо H. Затем, разделим каждую пару точек инволюции и станем рассматривать „точечные ряды" A_1, A_2, A_3, и A'_1, A'_2, A'_3, раздельно. Они „однозначно" („проективно") сопряжены друг с другом, ибо в силу условия о равенстве произведений каждой точке A_n соответствует одна единственная точка A'_n и, наоборот. Эти два точечные ряда „наложены" на одну и ту же прямую AA'_1 — „носитель" их. Отличительной чертой „инволюционного соответствия" является то, что, например, точке A'_2, если я ее возьму как точку A_4 первого ряда, соответствует точка A_2, как точка A'_1 второго ряда, т. е., вообще говоря, что пары точек соответствуют взаимно друг другу. На рис. 17а имеется, разумеется, налево от A соответствующий ряд пар точек как и направо от нее. Самой точке A соответствует бесконечно удаленная точка прямой, понятие о которой тоже было введено Дезаргом и последовательно использовано Понсле (см. ниже № XVI). На рис. 17а имеются также две „двойные точки" инволюции. Одна из них лежит вправо от A между B и H. Мы назовем ее M, а другую — влево от A — соответственно M' ($AM = AM'$; $AM^2 = AA_1 \cdot AA'_1 = \ldots$).

Известно, что любые четыре точки двух проективных рядов точек обладают одинаковым двойным отношением. Поэтому ясно, что, например,

$$(A_4, A_2, A_1, A_3) \barwedge (A'_4, A'_2, A'_1, A'_3),$$

что соответствует:

$$(F, D, G, B) \barwedge (D, F, C, H).$$

Мы получаем теперь, например, также — так как M и M' соответствуют каждая самой себе —

$$(M, M', A_n, A'_n) \barwedge (M, M', A'_n, A_n),$$

т. е.

$$\frac{MA_n}{A_nM'} : \frac{MA'_n}{A'_nM'} = \frac{MA'_n}{A_nM'} : \frac{MA_n}{A_nM'},$$

или

$$\left(\frac{MA_n}{A_nM'}\right)^2 = \left(\frac{MA'_n}{A'_nM'}\right)^2$$

и, следовательно, так как оба отношения не могут быть абсолютно равны между собой, если учитывать, как это делают теперь, знаки отрезков — имеем:

$$\frac{MA_n}{A_n M'} = -\frac{MA'_n}{A'_n M'}.$$

Это, как известно, означает, что точки A_n, A'_n расположены гармонически относительно M и M'. Я должен ограничиться этими замечаниями. Укажу еще лишь на то, что простейший пример инволюции точек на некоторой прямой g можно получить, пересекая g всеми окружностями какого-нибудь пучка (это легко доказать методами элементарной геометрии). Еще сам Дезарг доказал весьма общую теорему, что все конические сечения, проходящие через четыре неизменных точки, образуют на любой прямой g инволюцию.

XV

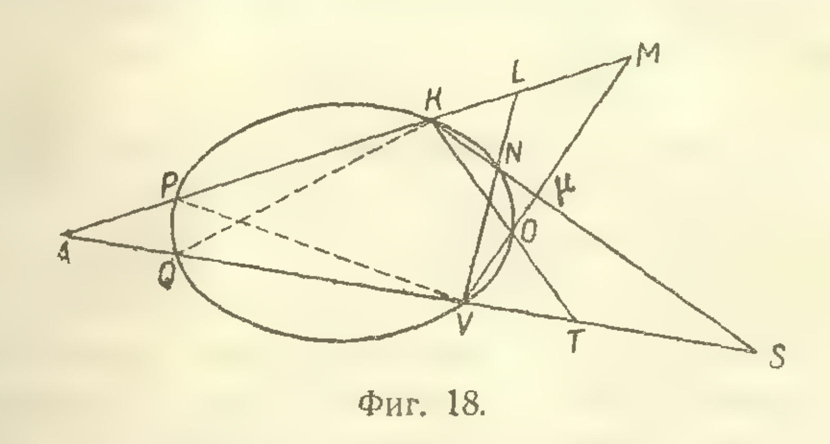
Первоначальная форма паскалевой теоремы

Из „Essay povr les coniques. Par B. P.“ Paris 1649.

Предварительные замечания. „Опыт о конических сечениях“ Блеза Паскаля появился в виде отпечатанной на одной стороне афиши размерами 47×39 *см*, которая была прибита, вероятно, на углах домов, как это с достоверностью известно относительно ряда сочинений Дезарга. Паскалю шел тогда 17-й год. В „Опыте“ было всего (без заголовков) 53 строки текста; цель его была привлечь внимание к другому, более крупному, труду о конических сечениях, над которым работал тогда Паскаль и над которым он продолжал работать еще в 1654 г. Но, к сожалению, он не был закончен, так как к этому времени Паскаль порвал с миром и мирскими делами. Потеряны и отрывки из этой работы, находившиеся еще в руках Лейбница. От оригинала „Опыта“ сохранилось только два экземпляра, один из которых находится в Ганновере среди бумаг Лейбница, а другой в Парижской Национальной библиотеке. Факсимиле „Опыта“ помещены в „Oeuvres de Blaise Pascal publ. par Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux“, I, Париж 1908, стр. 253 и сл., затем в „Historische Studien, door Hk de Vries“, выпуск I, Гронинген 1926, стр. 4 и сл. Текст „Опыта“ перепечатан в названных Oeuvres и снабжен введением и примечаниями.

Oeuvres. Стр. 253. Лемма I. Если в плоскости M, S, Q из точки M выходят две прямых MK, MV (фиг. 18), а из точки S две прямых SK, SV и если K есть точка пересечения прямых MK, SK, и V — точка пересечения прямых MV, SV, и A — точка пересечения прямых MA, SA, и μ — точка пересечения прямых MV, SK и если через две из четырех точек A, K, μ, V, которые не лежат на одной и той же прямой линии с точками M, S, как (например) через точки K, V, проходит окружность, пересекающая прямые MV, MP, SV, SK в точках O, P, Q, N, то я утверждаю, что прямые MS, NO, PQ будут одного и того же порядка [1].

(254). Лемма II. Если через одну и ту же прямую (g) проходит несколько плоскостей, пересекаемых некоторой другой



Фиг. 18.

плоскостью (ε), то все линии пересечения (с ε) этих плоскостей будут одного и того же порядка с прямой (g), через которую проходят все названные плоскости.

Исходя из обеих этих лемм и некоторых легких следствий из них, мы докажем, что при наличии тех же предпосылок, что и в первой лемме, если через точки K, V проходит произвольное коническое сечение, пересекающее прямые MK, MV, SK, SV в точках P, O, N, Q, то прямые MS, NO, PQ будут одного и того же порядка.

Пояснительные замечания. Эта первоначальная форма паскалевой теоремы, как легко заметить, прежде всего формулирована совершенно иначе и притом гораздо более неуклюже, чем мы это делаем в настоящее время, ибо в изложении Паскаля еще не видно, что все стороны шестиугольника $PQVONK$ играют

[1] Определение I паскалева „Опыта“ гласит: „Если несколько прямых проходит через одну и ту же точку, или же паралельны между собой, то говорят, что все эти прямые одного и того же порядка.“ *Прим. перев.*

одну и ту же роль. В настоящее время предпочитают обозначать вершины цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствующими в указанном порядке буквам *P*, *Q*, *V*, *O*, *N*. *K*. Затем рассматривают три точки пересечения так называемых „противоположных“ сторон 12 и 45 (*PQ* и *ON*), 23 и 56 (*QV* и *NK*), т. е. *S*, и, беря (циклически, как на рисунке) вслед за 6 снова 1, 34 и 61 (*VO* и *KP*), т. е. *M*. Тогда эти три точки пересечения, именно *S*, *M* и необозначенная точка лежат на одной прямой.

Однако из заметок Лейбница, составленных им лично для себя относительно вышеупомянутого, более крупного произведения Паскаля, ясно, что последний уже сам пришел к этой формулировке своей теоремы. Он обозначал (как это тоже охотно делается и теперь) стороны цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. В таком случае 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 пересекаются в трех точках некоторой прямой линии. Имеющиеся у Лейбница рисунки также уже такого характера, что шестисторонник не является непременно выпуклым: стороны его пересекаются между собой, так что слово „противоположные“, приведенное нами поэтому уже выше в кавычках, нельзя понимать буквально. Как известно, шесть вершин можно перенумеровать в любом порядке. Применение теоремы приводит всегда к „паскалевой прямой“.

В паскалевой формулировке, далее, замечательно то, что теорема первоначально была сформулирована для окружности. Но в третьей лемме Паскаль обобщает ее для любого конического сечения. И на чертеже у него нарисован, попросту, эллипс. Это обобщение было получено помощью второй (самоочевидной) леммы и „некоторых легких следствий“. Это не что иное, как метод проекции, заимствованный Паскалем у его учителя Дезарга, влияние которого можно было бы немедленно узнать по одному лишь способу выражения Паскаля, если бы последний не называл его прямо по имени. Но надо подчеркнуть то обстоятельство, что этой теоремы у Дезарга нет и что, как передают, Дезарг называл ее „cette grande proposition, la Pascale“ [1].

Третьей любопытной особенностью в изложении Паскаля является то, что он теорему эту называет „вспомогательной теоремой“, леммой. Из „Опыта“ видно, что имел в виду этими словами Паскаль, ибо он заявляет, что с помощью своих трех лемм он собирается построить полную теорию конических сечений. И, действительно, он приводит в виде примера ряд поло-

---

[1] Сам Паскаль, по свидетельству Лейбница, называл относящуюся к теореме фигуру мистическим шестиугольником (Hexagrammum mysticum).

жений, вытекающих без труда из его теоремы. Среди них имеется и нижеследующее положение, при формулировке которого, мы, отсылая читателя к чертежу [1], заменяем словесные обороты речи Паскаля, буквенной символикой:

$$\frac{PM}{MA} \cdot \frac{AS}{SQ} = \frac{PL}{LA} \cdot \frac{AT}{TQ}.$$

Достаточно это написать в виде

$$\frac{PM}{MA} : \frac{PL}{LA} = \frac{AT}{TQ} : \frac{AS}{SQ},$$

чтобы убедиться, что мы здесь имеем дело с равенством двух двойных отношений

$$(P, A, M, L) \;\overline{\wedge}\; (A, Q, T, S).$$

Если мы станем проицировать левую четверку точек из V, а правую из K, то мы получим „проективные четверки лучей" VP, VM, VL, VA и KA, KT, KS, KQ, которые пересекаются в том же порядке попарно в точках P, O, N, Q конического сечения [2]. Это означает получение конического сечения с помощью проективных пучков лучей, на котором построено в современной „проективной геометрии" все учение о конических сечениях (см ниже № XVIII). Мы видим, что Паскаль уже знал эту сторону дела, хотя он и не умел выразить ее, как мы, во всей ее общности.

Данное Паскалем доказательство теоремы не сохранилось. Но мы можем быть уверены, что оно было очень похоже на современное, проводимое методом элементарной геометрии

---

[1] На оригинальном рисунке имеется, в связи с другими теоремами, еще несколько лишних линий, но нет зато важных линий QP, ON, SM. Я, с своей стороны, прибавил линии VP и KQ, а также букву μ, по недосмотру пропущенную Паскалем.

[2] Мы можем доказать вышеприведенную теорему в несколько более современном виде следующим образом. Назовем X точку пересечения QP, ON и SM; в таком случае и TL проходит через X, так как и $PQVNOK$ можно рассматривать как паскалев шестиугольник. Это, без сомнения, было известно и Паскалю. Таким образом четверки точек A, P, L, M, и A, Q, T, S, рассматриваемые из X, расположены перспективно, — символически

$$(A, P, L, M) \;\overline{\overline{\wedge}}\; (A, Q, T, S).$$

Но так как легко показать, что

$$(A, P, L, M) \;\overline{\wedge}\; (P, A, M, L),$$

то имеем также

$$(P, A, M, L) \;\overline{\wedge}\; (A, Q, T, S).$$

доказательство для круга, как основного конического сечения. При этом мы должны иметь только в виду, что так называемая теорема о секущих применялась в форме пропорции, а теорема Менелая — в более древней форме составного отношения (т. е., примерно, вместо $mnp = m'n'p'$ в виде $\frac{m}{m'} \cdot \frac{n}{n'} = \frac{p'}{p}$).

Дальнейшая история теоремы Паскаля и взаимной с ней по принципу двойственности — теоремы Брианшона, на которой мы здесь совершенно не можем останавливаться, подробнее всего изложена у де-Вриса (Vries), несколько более сжато, но с точными литературными указаниями, — у Э. Кеттера (Kötter) „Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847)“. (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 5. Bd., 2 Heft) Leipzig 1901. Стр. 14 и сл Мы вынуждены здесь ограничиться замечанием, что паскалев „Опыт“ не был оценен по достоинству теми немногими современниками, которым он стал известен, и что позднейшие ученые вообще ничего не узнали о нем (это относится даже к ла-Гиру, который в своих исследованиях ближе всего примыкает к Дезаргу). Благодаря этому совершенно приостановилось вплоть до новейшего времени развитие современной чисто геометрической теории конических сечений, которой могло бы быть положено начало работами Дезарга и Паскаля.

XVI

Введение понятия проективных свойств

Из „Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain“. Par J.-V. Poncelet. Paris, Bachelier,... 1822.

1. В нижеследующем мы будем почти всегда придавать слову проекция то же значение, что и слову перспектива; поэтому проекция будет конической или центральной.

....

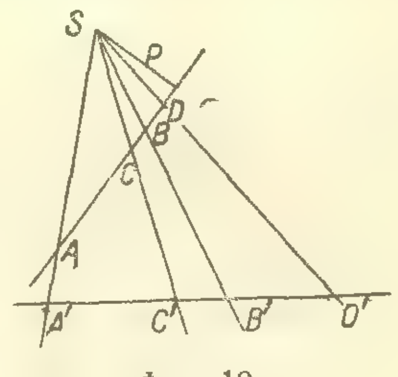
В соответствии с этим мы представляем себе, что из некоторой данной точки, принимаемой за центр проекции, выходит пучок прямых линий, направленных ко всем точкам начерченной в некоторой плоскости фигуры; если пересечь этот пучок проицирующих прямых другой плоскостью, расположенной произвольным образом в пространстве, то на этой плоскости получится новая фигура, которая будет проекцией первой (4).

....

4. Согласно общепринятому в геометрии определению Аполлония, сечением конуса (section conique) или просто коническим сечением (conique) называется линия, по которой произвольная плоскость пересекает какой-нибудь конус с круговым основанием; таким образом коническое сечение есть не что иное, как проекция окружности и, согласно предыдущему, является также линией второго порядка, так как окружность может пересекаться любой, расположенной в ее плоскости, прямой не более чем в двух точках (5).

5. Фигура, части которой имеют между собой только графические зависимости типа тех, о которых говорилось выше, т. е. зависимости, не уничтожаемые проицированием, будет в нижеследующем называться проективной фигурой.

Сами же эти зависимости, и, вообще, все отношения или свойства, имеющие место в одно и то же время и у данной фигуры и у ее проекции, будут аналогичным образом называться проективными отношениями или свойствами.



Фиг. 19.

6. (Здесь говорится, что нетрудно распознать проективные или графические свойства простого положения (disposition).

7. Наоборот, нелегко решить, сохраняются ли при проицировании и свойства величин, которые он называет метрическими. Это разбирается в дальнейшем.)

....(9) ....

9. (Надо попытаться установить общим образом условия, когда метрическое свойство проективно.) ... Исходя из этого предположения, мы рассмотрим, в частности, что происходит в плоскости, образуемой произвольно продолженными проицирующими SA,SB (фиг. 19) [1], проходящими через конечные точки отрезков AB и $A'B'$, из которых последний рассматривается как проекция первого.

Согласно весьма известной теореме из элементарной геометрии, площади треугольников SAB, $SA'B'$, имеющих общий угол при вершине S, относятся между собой, как прямоуголь-

[1] Вследствие произведенных мною пропусков текста, я даю выше только фиг. 2 оригинала, к которой я прибавил p.

ники (произведения) $SA \cdot SB, SA' \cdot SB'$ сторон, заключающих этот угол, и, следовательно, отношение площади любого из этих треугольников к соответствующему ему прямоугольнику — постоянно. Поэтому, если назвать это отношение, зависящее только от большего или меньшего раствора угла при S, через $\frac{m}{2}$ и если обозначить длины проицирующих SA, SB просто через a, b, а через p (длину) перпендикуляра из центра проекции на направление AB, то имеем:

$$\text{площадь } SAB = \frac{1}{2} p \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot a \cdot b\,,$$

откуда следует:

$$AB = m \cdot \frac{a \cdot b}{p}\,.$$

... (То же самое относится к другим отрезкам c, d, p' и m').
..................(8).............. .

11. Существует очень обширный класс отношений, для которых из результата подстановки исчезают перпендикуляры p, p'... одновременно с a, b,..., причем нет необходимости — как при выше принятом общем предположении — заменить их значениями, которые они принимают в соответствующих треугольниках. Именно этого рода отношения мы имели в предыдущем в виду.
....(10)..................

17. Рассмотренные нами только что величины m, m'... представляют, очевидно, не что иное, как **синусы** проицирующих углов или постоянные отношения между перпендикулярами из различных точек одной из сторон каждого из этих углов на соответствующую сторону и расстояниями этих самих точек от общей вершины или центра проекции; таким образом можно формулировать следующий общий принцип:

„Если провести из любой точки как центра проекции пучок проицирующих прямых к различным точкам какой-нибудь фигуры и ..... если части этой фигуры имеют между собой одно или несколько метрических проективных отношений, соответствующих предписанным условиям (§ 11), то эти самые отношения будут иметь место и между синусами проицирующих углов, которые им соответствуют“.
..................(12)..................

21. В качестве очень простого примера такого рода отношений рассмотрим четыре точки A, B, C, D (фиг. 19), лежащие на одной прямой и связанные между собой пропорцией

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB},$$

т. е. такие точки, что отрезок AB делится точкой C и точкой D на пропорциональные отрезки (en segments proportionelles).

Ясно, что это отношение принадлежит к специальному классу отмеченных в § 20 отношений. Следовательно, оно будет иметь место для всех проекций фигуры*, свойство, которое было известно древним, как это вытекает из теоремы CXLV кн. VII „Математического сборника" Паппа.

В следующих параграфах вводится понятие гармонического деления и гармонического пучка, после чего теорема формулируется в § 24 (стр. 13) следующим образом: „Гармонический пучок пересекается какой-нибудь секущей прямой в четырех гармонических точках". В § 25 Понсле обращает внимание еще на то, что, согласно № 17, приведенное в § 21 отношение имеет силу и для синусов углов, соответствующих в пучке отрезкам и что, наоборот,— причем он ссылается на „Essai sur la théorie des transversales" Карно (Carnot), § 15, — если в пучке имеет место отношение синусов, то пучок этот будет гармоническим в указанном смысле.

Пояснительные замечания. Понсле смог еще через 43 года, в полном расцвете сил, выпустить второе издание своего труда, основной текст первого тома которого вполне тождественен с изданием 1822 г. Это последнее издание, само по себе, представляет почтенный том in quarto в xlvj + 426 стр. с 12 таблицами, к которому в 1865 г. был добавлен такой же толстый второй том.

Хотя в 1864 г. были изданы произведения Дезарга, Понсле, труд которого как раз печатался в это время, не имел еще ни-

* (Примечание оригинала.) Господин Брианшон приходит к этому результату, как и к некоторым другим, вполне аналогичным образом, указывая, что „для четырех неизменных прямых, выходящих под произвольными углами из одной и той же точки и пересекаемых в A, B, C, D произвольной секущей прямой (имеет место равенство)

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\text{const.}"$$

(Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris 1817.)

какого представления о нем, и во 2-м изд. он тоже высказывает только догадки о содержании „Brouillon proiect“. Тем не менее он называет Дезарга Монжем своего века (стр. XXVI; стр. xxxviij 1 изд.). Монж был новооснователем, можно почти сказать, изобретателем „начертательной геометрии“; да и другими своими геометрическими исследованиями он оказал существенные услуги делу создания „проективной геометрии.“

Интересно прибавление, которым Понсле сопровождает заголовок своего труда: „Труд, полезный для лиц, занимающихся приложениями начертательной геометрии и геометрическими измерениями на земной поверхности“. Это прибавление совершенно в духе революционной эпохи, в которую жил Монж, эпохи, когда старались немедленно практически использовать бесчисленные тогдашние геометрические открытия. И, фактически, как Монж так и Понсле владели также так называемой „прикладной математикой“. Но оба эти ученые сделали также массу чисто теоретических исследований, и как раз излагаемый нами здесь труд Понсле менее всего можно назвать „практическим“. Как сообщает сам автор в предисловии к первому изданию своего труда, он составил его, будучи лишен всяких литературных источников, в какихнибудь $1^1/_2$ года (с весны 1813 до осени 1814) в русском плену (в Саратове) и по возвращении на родину произвел в нем лишь незначительные изменения. Историческое введение написано, вероятно, во Франции.

Трудом Понсле были заложены основы современной „проективной геометрии.“ В этом отношении ничего не изменяет то обстоятельство, что некоторые из элементов ее были уже известны и ранее, как это указывает и сам Понсле. Уже ла-Гир в своем большом труде „Sectiones conicae“ (Париж 1685) развил, примыкая к Дезаргу, теорию конических сечений из проекций круга, хотя ла-Гир и не понимал глубокомысленных идей Дезарга во всем их значении.

Трактат Понсле придал новые формы и новый размах идее проекции.

Мы привели выше главнейшие места, объясняющие понятие „проективных свойств“ и иллюстрирующие его на частном примере. Понсле не проводит еще различия между действительно проективными и непроективными „метрическими“ свойствами, и делит проективные свойства на „графические проективные“ (например, пересечение и соприкасание между собой линий) и „метрические проективные свойства“, т. е. такие свойства, которые должны выражаться через отрезки и углы, но сохраняются все же при проекции. Хотя при передаче текста я многое вы-

пустил, но изложение все еще остается многословным. Мы резюмируем вкратце, что имеет в виду Понсле.

Легко видеть, что

$$AB = \frac{SA \cdot SB \cdot \sin(ASB)}{p}.$$

Существуют выражения из таких отрезков, как AB, в которых выпадают SA, SB, p, — выражения, составленные, таким образом, только из синусов углов. Таким выражением является, например, нижеследующее (причем, я пользуюсь несколько более современным начертанием):

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{SA \cdot SC \cdot \sin(ASC)}{SC \cdot SB \cdot \sin(CSB)} : \frac{SA \cdot SD \cdot \sin(ASD)}{SD \cdot SB \cdot \sin(DSB)} =$$

$$= \frac{\sin(ASC)}{\sin(CSB)} : \frac{\sin(ASD)}{\sin(DSB)}.$$

Таким образом это „двойное отношение“ („Doppelverhältnis“), как выражался впоследствии Штейнер (Steiner; см. ниже № XVIII), зависит только от синусов углов между четырьмя проицирующими лучами и оно, следовательно, одно и то же для всякой прямой AD или $A'D'$. Обратная этому теорема гласит, что если даны четыре точки A, B, C, D, и если взять за центр проекции какую-нибудь другую точку S', то у нового пучка будет снова то же самое „двойное отношение синусов“, что и у старого, так что какая-нибудь другая секущая прямая пересекает новый пучок в четырех точках, с тем же самым „двойным отношением между точками“. Понсле рассматривает только тот случай, когда двойное отношение „гармонично“ (ср. вып. I № VI), т. е. как это формулировал впоследствии Мебиус (Möbius; см. ниже № XVII), когда оно равно —1.

XVII

Проективность двойного отношения четырех точек

Из „Der barycentrische Calcul (,) ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie (,) dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet von August Ferdinand Möbius (,) Professor der Astronomie zu Leipzig“. Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1827.

Стр. 246.

§ 183. Ради краткости образующееся между четырьмя точками двойное отношение будет впредь выражаться таким образом, что буквы для начальной точки, конечной точки и

для первой и второй точек сечения будут помещаться в названном порядке одна за другой, отделяться запятыми и заключаться затем в скобки.

Поэтому впредь вместо $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ будет писаться

$$(A, B, C, D)$$

и точно так вместо $\frac{BA}{AD} : \frac{BC}{CD}$, где B и D представляют крайние точки, A и C — точки сечения, будет писаться

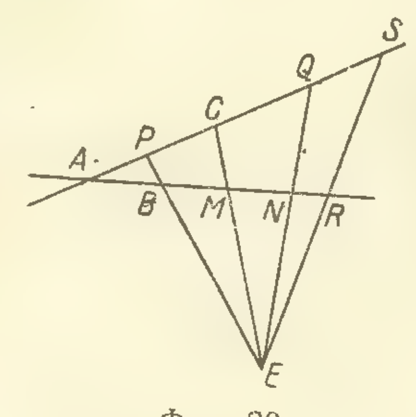
$$(B, D, A, C)$$

и т. д.

....

Стр. 252.

Двойные отношения у системы прямых линий в плоскости



Фиг. 20.

§ 188 Теорема. Если три расположенные в одной плоскости прямых BP, MC, NQ (фиг. 20) пересекаются в одной и той же точке E и если две других прямых, точка пересечения которых есть A, пересекаются ими соответственно в точках B, M, N и P, C, Q, то

$$(A, B, M, N,) = (A, P, C, Q).$$

Доказательство. Мы имеем, что

$$AM : BM = ACM : BCM = AME : BME,$$

и, значит, $= ACE : BCE$, ибо $ACM + AME = ACE$ и т. д.; далее,

$$AC : PC = ACE : PCE,$$

следовательно,

$$\frac{AM}{BM} : \frac{AC}{PC} = \frac{PCE}{BCE} = \frac{PE}{BE}$$

и, таким же образом,

$$\frac{AN}{BN} : \frac{AQ}{PQ} = \frac{PE}{BE},$$

следовательно,

$$\frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB} = \frac{AC}{CP} : \frac{AQ}{QP},$$

т. е.

$$(A, B, M, N) = (A, P, C, Q). \qquad (1)$$

§ 189. Дополнение. Проведем через E еще четвертую прямую RS, пересекающую AB и AC соответственно в R и S, тогда аналогичным образом имеем:

$$(A, B, M, R) = (A, P, C, S).$$

Так как равенство двух двойных отношений, согласно § 184, не изменяется, если в них обоих переместить одинаковым образом все четыре буквы, то можно также написать:

$$(B, M, N, A,) = (P, C, Q, A),$$
$$(B, M, A, R) = (P, C, A, S).$$

Если перемножить между собой оба равенства, то (§ 185, II) получаем:

$$(B, M, N, R) = (P, C, Q, S), \qquad (2)$$

что приводит к следующей, еще более общей, теореме:

„Если между точками двух расположенных в одной плоскости прямых устанавливают такого рода соответствие, что прямые, соединяющие каждые две соответствующие точки, пересекаются в одной общей точке, то каждое двойное отношение одной линии равно двойному отношению, образуемому соответствующими точками другой линии“; или:

„четырьмя пересекающимися в одной и той же точке и расположенными в одной плоскости прямыми всякая другая прямая плоскости пересекается в одном и том же двойном отношении“.

. ...

Стр. 454. Остающееся еще в этом листе место позволяет мне прибавить еще одно замечание, именно, что все двойные и многократные отношения (отношения сечения многоугольников), образуемые указанным в этой главе способом точками, в которых известные прямые пересекают любую другую прямую, могут быть выражены также просто в виде функций углов, образуемых названными первыми прямыми между собой.

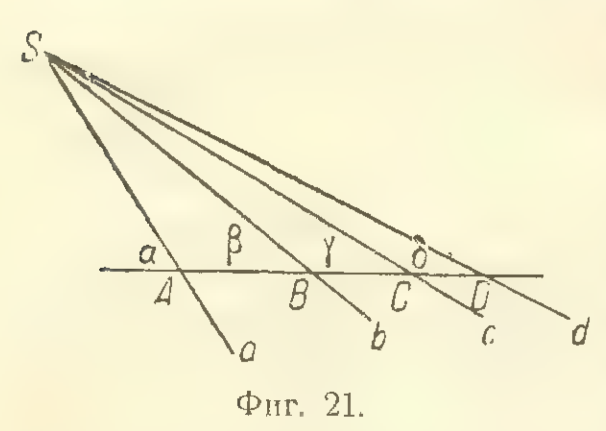
Действительно, пусть будут—ограничиваясь только двойными отношениями — a, b, c, d четыре расположенных в одной плоскости и пересекающихся в одной точке прямых, и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ —

углы, образуемые этими прямыми с какой-нибудь другой прямой плоскости, в таком случае имеем двойное отношение:

$$\left(a, b, c, d\right) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \delta)} : \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\gamma - \delta)}.$$

....

Пояснительные замечания. Читателю может показаться излишним, что мы еще раз остановились на вопросе о двойном отношении, которым мы занимались в предыдущей главе. Но как раз приведенные нами отрывки из Мебиуса дают повод к целому ряду важных замечаний. Во-первых, труд Мебиуса имеет основоположное значение с точки зрения истории судеб двойного отношения в Германии, да и не в одной только Германии. Как мы видели, французские авторы занимались им только случайным образом. Лишь М. Шаль уделил ему во Франции должное внимание (в своем Aperçu historique etc., Брюссель, 1837, частично составленном еще в 1830 г.). Мебиус не только посвятил ему целую главу (стр. 243—265), но понял все основоположное значение его, указав, что оно сохраняется (инвариантным) не только при центральной проекции, но и при всякой так называемой коллинеации, т. е. линейном преобразовании координат. Координаты Мебиус ввел, как координаты центра тяжести; отсюда и заглавие книги.



Фиг. 21.

Вывод теоремы Мебиусом мы не найдем особенно сжатым, но все-таки строгая форма его удовлетворит нас больше, чем крайне общие рассуждения Понсле. Впрочем форма изложения у Мебиуса носит совершенно античный характер: точно такое же доказательство мог бы дать и Эвклид. В этом отношении Понсле несколько более современен; он хотя бы под конец указывает, что его постоянная представляет собой синус Но и у него встречается совершенно ненужная высота p. Ясно, что эти ученые еще не привыкли или, может быть, даже не любили пользоваться услугами тригонометрии.

Но раз имелись углы, то, в конце концов, нельзя было не заметить их важной роли. И вот, на последней странице своей книги, Мебиус делает-таки в связи с ними ценное замечание. То,

что следует у него за вышеприведенным отрывком, представляет неинтересные для нас частности. Но доказательства приводимой им формулы он не дает. Я здесь приведу такое, на мой взгляд, совершенно простое и современное доказательство, пользуясь только теоремой синусов. Так как на фиг. 21

$$\measuredangle ASB = \alpha - \beta, \quad \measuredangle BSD = \beta - \delta \text{ и т. д., то}$$

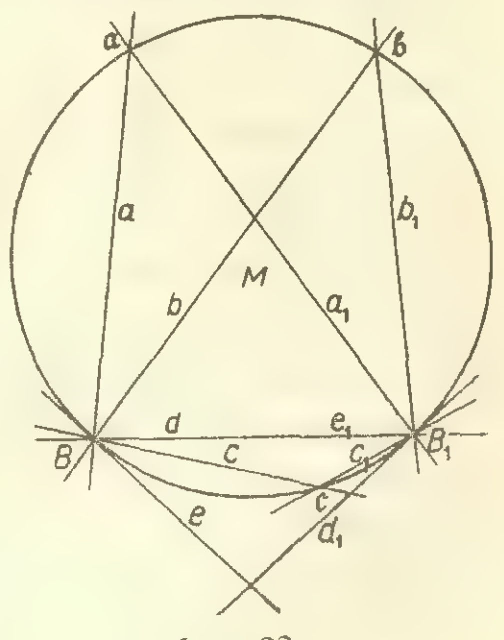
$$\frac{AB}{SB} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}; \quad \frac{BD}{SB} = \frac{\sin(\beta - \delta)}{\sin \delta}.$$

Если написать таким же образом отношения $\frac{AC}{SC}$ и $\frac{CD}{SC}$, то немедленно получается теорема Мебиуса.

XVIII

Получение конических сечений из проективных пучков лучей

Из „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc.“ von Jacob Steiner. Erster Theil, Berlin,... G. Fincke, 1832. Перепечатана в № 82 и 83 оствальдовской серии классиков точного знания. Лейпциг, 1896.



Фиг. 22.

Стр. 134...

37. Известные из элементарной геометрии свойства окружности показывают почти непосредственным образом, как можно получить ее с помощью проективных образов, и, именно, следующим путем.

Если из каких-нибудь двух точек B, B_1 некоторой (135) окружности M (фиг. 22) провести ко всем прочим точкам 𝔞, 𝔟, 𝔠... лучи a, b, c...; a_1, b_1, c_1..., то последние образуют равные между собой углы, опирающиеся попарно на одну и ту же дугу, именно, угол $(ab) = (a_1b_1)$, $(ac) = (a_1c_1)$, $(bc) = (b_1c_1)$,..., следовательно, образовавшиеся благодаря этому пучки лучей B, B_1 по отношению к парам лучей a и a_1, b и b_1, c и c_1 проективно равны (§ 13, II)..............................

...Значит, пучки лучей B, B_1 находятся в косом положении (§ 14) и, притом, они, как легко видеть, одинаково расположены (§ 13 II).

Стр. 137......

Из обоих предшествующих исследований вытекают, таким образом, нижеследующие теоремы. (Так как я оставил вообще в стороне вопросы двойственности, то в дальнейшем я привожу лишь напечатанные на правой стороне, относящиеся к пучкам лучей, теоремы):

„Любые две точки (B, B_1) окружности являются центрами двух проективных пучков лучей, соответствующие лучи которых пересекаются в остальных точках окружности, причем совпадающим лучам d, e_1, соответствуют касательные d_1, e в этих точках (B, B_1)"

38. Как уже было замечено выше (§ 36, в конце), из только что установленных теорем о круге (§ 37) следуют непосредственно соответствующие теоремы о конусе второй степени и его прочих сечениях. Действительно... если пучки лучей в (138) круге проективны, то и соответствующие им пучки плоскостей в конусе тоже проективны между собой, так что непосредственно получаются нижеследующие теоремы:

I. „Любые два луча (две образующих) конической поверхности второй степени являются осями двух проективных пучков плоскостей, у которых соответствующие пары плоскостей пересекаются в прочих лучах, и, в частности, совпадающим в плоскости этих лучей плоскостям (δ, ε_1) соответствуют те плоскости (δ_1, ε), которые касаются конуса в этих лучах".

И обратно:

II. „Любые два косо расположенных проективных пучка плоскостей $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{A}_1$ находящихся в одном и том же (пространственном) пучке лучей D, порождают конус второй степени, проходящий через их оси, т е. линии пересечения соответствующих пар плоскостей вместе с осями пучков плоскостей дают всю систему лучей (образующих) определенного конуса второй степени, и этого конуса касаются в названных осях ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) те плоскости (δ_1, ε), соответствующие плоскости которых сливаются в плоскость, определяемую этими самыми осями".

Так как (139)... два расположенных в конусе проективных пучка плоскостей $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, пересекаются вышеназванной (упоминаемой в выпущенных нами местах текста, произвольной) плоскостью E в двух проективных плоских пучках лучей B, B_1 (§ 33), то отсюда следуют, как упоминалось выше, для всех конических сечений следующие замечательные теоремы:

III. „Каждые две точки B,B_1 конического сечения суть центры двух проективных плоских пучков лучей, соответствующие лучи которых пересекаются в прочих точках его, причем совпадающим лучам (d,e_1) соответствуют касательные (d_1,e) в центрах (B_1B).

И обратно:

IV. „Любые два косорасположенных в плоскости проективных (плоских)[1] пучка лучей B,B_1, порождают коническое сечение, проходящее через их центры, иначе говоря, эти центры и точки пересечения соответствующих пар лучей суть все точки определенного конического сечения, причем, последнего в этих центрах касаются те лучи (e,d_1), соответствующие лучи которых (e_1,d) совпадают".

Пояснительные замечания. Перед нами здесь то классическое место, в котором, впервые, в качестве определения берется постоянство двойного отношения пучков лучей, исходящих из двух точек конического сечения, постоянство, используемое в дальнейшем для вывода всех свойств их. Правда, Штейнер — как он выражался „из любви к традиции" — еще определял коническое сечение как проекцию круга, вместо того чтобы опираться, как это он делал впоследствии на своих лекциях, на паскалеву теорему (см. выше № XV), которую он вывел в § 24 (стр. 86 и сл., особенно стр. 90 оригинала). Я обращаю еще раз внимание на то, что Штейнер последовательно применяет открытый Понсле и Жергоном (Gergonne) принцип двойственности и что теоремы напечатаны у него в двух столбцах. Из соображений экономии места я должен был от этого отказаться.

Равенство двойного отношения пучков лучей в круге вытекает немедленно из отношения синусов (см. выше № XVII). Замечание о касательных легко понять и без выпущенных мной кратких пояснительных замечаний Штейнера. В связи с утверждением, что пучки лучей „равнонаправлены", Штейнер делает подстрочное примечание, где говорит, что не равнонаправленные конгруентные пучки лучей образуют равностороннюю гиперболу. Дальнейшие рассуждения его не нуждаются ни в каких разъяснениях.

---

[1] Скобки в оригинале.

Именной указатель.

Гарриот, Томас (1560 — 1621). Родился в Оксфорде. Его главный труд, имевший особенно важное значение для установления алгебраических обозначений, появился лишь 10 лет спустя после его смерти. 42.

Гейберг, Иоганн Людвиг (1854 — 1928). Специалист по классической философии, профессор Копенгагенского университета. Переиздал ряд греческих математиков (и врачей). 7, 8, 11.

Дебон, Флоримонд (1601 — 1652). Советник при трибунале в Блуа. Наряду с этим занимался математикой и изготовлением астрономических инструментов. 31, 32, 33, 36.

Дезарг, Жерар (1593—1661). Родом из Лиона. Был некоторое время офицером. Крупный геометр, в частности, сделал многое в учении о перспективе. 48, 49, 51, 52, 53, 54, 56, 61, 62.

Декарт, Рене (1596 – 1650). Великий французский философ и математик. Одновременно с Ферма является создателем метода аналитической геометрии, имеющей, однако, у него более современный вид, особенно со стороны алгебраической символики. 15, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 39, 42, 46, 48.

Жергон, Иосиф Диац (1771 — —1859). Сперва артиллерийский офицер, затем проф. математики в Ниме и Монпелье. Выдающийся геометр. 69.

Карно, Лазарь (1753—1823). Сперва инженерный офицер, в эпоху революции военный министр. Позднее был изгнан из Франции, умер в Магдебурге, Выдающийся геометр. 61.

Кеплер, Иоганн (1571—1630). Родом из Вюртемберга, астроном, открыл названные по его имени законы движения планет. Один из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых. Сделал много ценных открытий в оптике. Одно время был на службе у императора Рудольфа II и у Валленштейна. 45.

Кеттер, Эрнст (1859—1922). Профессор математики. 58.

Ла-Гир, Филипп де- (1640—1718). Член Парижской академии и профессор математики. 37, 39, 49, 58, 62.

Латам, Марчиа Л. (ум. 1925). Молодая американская преподавательница математики. 27.

Лейбниц, Готтфрид Вильгельм фон- (1646—1716). Родом из Лейпцига; последние годы жизни провел в Ганновере. Разносторонний ученый, математик и философ. Открыл диференциальное и интегральное исчисления (см. также Ньютон). Высказал основную идею принципа сохранения энергии. 28, 42, 54, 56.

Лопиталь, Гильом Франсуа (1661—1704). Французский офицер. Кроме цитируемой работы написал также введение в анализ бесконечных. 39, 40, 42.

Менелай (около 100 н. э.). Греческий математик и астроном. Жил в Риме. От него сохранилась превосходная „Сферика". 58.

Менехм (около 360 до начала н. э.). По свидетельству Прокла (5 в. н. э.) будто бы открыл конические сечения. 7.

Мебиус, Август Фердинанд (1780—1868). Профессор астрономии и директор Лейпцигской обсерватории. Превосходный геометр. 63, 66, 67.

Мидорж, Клод (1585 — 1647). Французский ученый. Написал труд о конических сечениях. 15.

Монж, Гаспар (1746—1818). Профессор математики в ряде военных школ в Париже. Во время революции — морской министр. Сопровождал Наполеона в Египет. Выдающийся геометр. Создатель „начертательной геометрии". Сделал много ценных открытий в диференциальной геометрии. 58, 62.

Ньютон, Исаак (1642 — 1727).

Сперва профессор Кембриджского университета, затем директор монетного двора в Лондоне. Творец диференциального и интегрального исчисления (см. также Лейбниц). Сделал важные открытия в оптике и небесной механике (закон тяготения). 19.

Оствальд, Вильгельм (род. 1853). Профессор химии Лейпцигского университета. Основатель издания „оствальдовской серии классиков точного знания". 17, 48.

Оутред, Вильям (1574 — 1660). Английский пастор. Сделал много ценного в алгебре и тригонометрии. Один из первых инициаторов буквенного исчисления. 42.

Папп (конец 3 в. н. э.). Автор большого, не лишенного самостоятельности сборника, в котором содержатся отрывки из утерянных сочинений многих древних математиков. 31, 33, 48, 61.

Паскаль, Блез (1623—1662). Религиозно-философский мыслитель. Родом из Клермон-Феррана. В последний период жизни жил аскетом. Сделал выдающиеся открытия в геометрии и гидростатике. Предшественник творцов исчисления бесконечно-малых. Вместе с Ферма (см.) заложил основы исчисления вероятностей, изобрел счетную машину. Прославился также как писатель. 54, 55, 56, 57, 58.

Платон (429? — 348?). Греческий философ-идеалист. Значение его для математики заключалось не столько в самостоятельных открытиях, сколько в том, что он включил математические знания своего времени в свою систему и сделал таким образом математику необходимым предметом преподавания. 7.

Понсле, Жан Виктор (1788—1867). Французский саперный офицер, впоследствии профессор механики в Париже. Выдающийся геометр. 49, 53, 58, 61, 62, 63, 66, 69.

Пудра, Ноэль Жерминаль (1794 —?). Ротмистр и профессор математики при французском генеральном штабе Издатель трудов Дезарга. 48.

Рекорд, Роберт (1510 — 1558). Врач и математик в Лондоне. В его „Wethstone of witte" (т. е. оселок остроумия) употребляется знак равенства, отличающийся от соответствующего современного знака лишь тем, что он был несколько длиннее. 42.

Скаутен, Франс фон- (1581—1646). Профессор математики Лейденского университета. 31, 33, 34, 36, 37.

Смит, Давид Евгений (род. 1860). Профессор Нью-Йоркского университета. Выдающийся историк математики. 27.

Таннри, Поль (1843—1904). Был директором кожевенного завода. Наряду с этим выдающийся историк математики и астрономии, в особенности знаток греческой древности. Один из издателей трудов Декарта. 17, 19, 23.

Ферма́, Пьер де- (1601 — 1665). Французский юрист (судья); один из величайших математиков. Его главные заслуги заключаются в открытии аналитической геометрии, в чем он является соперником Декарта (см.), и в работах по теории чисел. Является одним из предшественников творцов исчисления бесконечно-малых. В методе изложения предпочитал манеру древних. 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 36, 39.

Ферма́, Самуил (1630 – 1690). Напечатал труды своего отца, Пьера-де-Ферма́. 19.

Цахариас, Макс (род. 1873). Педагог (математик). Написал ценную статью о состоянии и развитии элементарной математики в „Enc. d. math. Wiss". 48, 51.

Чвалина, Артур (род. в 1884 в Познани). Директор высшего учебного заведения в Гумбинене. 7.

Шаль, Мишель (1793—1880). Профессор математики, геодезии и машиноведения в Париже. Выда-

Оглавление.